org
ch
gs-
ch.

Sc. mil. 220/1,1

Ve. mil. 220 (1,1

1×Kep.

Backenberg
Lehrbuch d.
Kriegswiss.
1,1

A

2

779

Lehrbuch
der
niedern Mathematik.

Erste Abtheilung,
Arithmetik und Algebra,
besonders
zum Gebrauche für Officiers bestimmt.

Entworfen
von

Franz Heinrich Backenberg,
Königl. Sächsischem Hauptmanne der Infanterie, Director der mathematischen Wissenschaften und Lehrer der Fortification und Tactik bei der Ritterakademie zu Dresden.

Bayer. Sta[illegible]ministerium
f. Ernäh[illegible] u. Forsten
Min[illegible]
Aa 1
2.

Dritte verbesserte und vermehrte Ausgabe.

Leipzig 1812,
in Joh. Benj. Georg Fleischers Buchhandlung.

Lehrbuch
der
Kriegswissenschaften
für die
Königl. Sächsische Ritterakademie
bestimmt.

Erster Theil,
welcher
die Vorbereitungswissenschaften
enthält.

Erste Abtheilung,
Arithmetik und Buchstabenrechnung.

Mit höchster Genehmigung entworfen
von

Franz Heinrich Backenberg,
Königl. Sächsischem Hauptmanne der Infanterie, Director der mathematischen Wissenschaften und Lehrer der Fortification und Tactik bei der Ritterakademie zu Dresden.

Dritte verbesserte und vermehrte Ausgabe.

Leipzig 1812,
in Joh. Benj. Georg Fleischers Buchhandlung.

421 a
gd 164186
Ministerial… 170

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Hochwohlgeboren

dem Herrn Generalmajor der Kavallerie

von Gersdorf,

Königl. Generaladjutanten und Chef des Generalstabes Sr. Majestät des Königs von Sachsen, Kommandeur des Militair-St. Heinrichs-Ordens, auch Mitglied der Kaiserl. Französischen Ehrenlegion.

weiht

dieses Lehrbuch

ehrfurchtsvoll

der Verfasser.

Hochwohlgeborner Herr!

Gnädiger Herr Generalmajor!

Die prüfende Umsicht, mit welcher Ew. Hochwohlgeboren auf das Ganze der militairischen Erziehung wohlthätig wirken, durchdringt auch das Einzelne. Sie konnte daher ein Lehrbuch, das für den Unterricht der Kadetten in der Mathematik bestimmt ist, nicht unbeobachtet lassen. Ich wage es daher, Ihnen, mein Herr General, dieses Buch, so anspruchlos wie es ist, öffentlich zu überreichen, weil es das kleinste Zeichen der Huldigung zu seyn wünscht, die Ihnen die Mit- und Nachwelt für den einsichtsvollen Eifer schuldig ist,

mit welchem Sie die Bildung der militairischen Jugend den Forderungen des Zeitalters gemäß befördern.

Ich verharre mit tiefer Ehrfurcht

Gnädiger Herr Generalmajor

Ew. Hochwohlgeboren

unterthäniger

Franz Heinrich Backenberg.

Vorrede.

Gegenwärtiges Lehrbuch ist zunächst für die Königl. sächsische Ritteracademie bestimmt, und daher ist es wohl billig, Rücksicht auf die eigenthümlichen Bedürfnisse derselben zu nehmen, um den Gesichtspunct festhalten zu können, aus welchem die Behandlung der hier vorzutragenden Wissenschaften dem Ganzen am nützlichsten werden kann.

Da mir die Leitung der mathematischen Wissenschaften im Ganzen anvertrauet ist, mein eigener Unterricht aber sich zunächst auf die Fortification, Tactik, militärischen Styl und militärische Geschichte verbreitet; so wurde mir schon im Jahre 1796, um die Einheit des Systems unter den übrigen Lehrern zu bewirken, aufgetragen, ein den Bedürfnissen unsers Instituts angemes-

gemessenes Lehrbuch der mathematischen Wissenschaften auszuarbeiten.

Nachdem sich die beiden ersten Auflagen desselben vergriffen haben, so sehe ich mich genöthiget, eine dritte zu veranstalten, die jedoch nur wenige Abänderungen erhalten hat. Die Erweiterung und zweckmäßigere Einrichtung des eingeführten Lehrplans hat mich auch in den Stand gesetzt, den in diesem Lehrbuche vorgetragenen Vorbereitungswissenschaften eine größere Deutlichkeit und Uebereinstimmung zu geben.

Ich glaube nicht, daß man den Umfang der hier vorgetragenen Vorkenntnisse zu weitläuftig finden wird, da der gegenwärtige Zustand der ausübenden Kriegskunst, und die Anwendung der Arithmetik und Geometrie auf alle Zweige derselben, diese Ausdehnung wohl nöthig macht. Sollte jedoch jemand, bei dem Gebrauche dieses Lehrbuches, einiges für den Zweck, oder für die Fähigkeiten seiner Zuhörer, zu reichhaltig finden; so kann ja sehr leicht das ihm überflüssig Scheinende weggelassen werden, da es auf der andern Seite vielleicht nicht unzweckmäßig seyn dürfte, talentvollere junge Männer etwas weiter als gewöhnlich zu führen.

Da die Einrichtung dieses Lehrbuches also nur nach den Verhältnissen und aus dem Gesichtspuncte unsers Instituts zu beurtheilen ist; so verdiene ich gewiß Entschuldigung, wenn ich es wage, mich an so viele

viele treffliche Männer, die mir vorgearbeitet und der Welt schätzbare mathematische Lehrbücher gegeben haben, anzuschließen; denn dieses Lehrbuch erscheint nicht, weil ich die Verdienste jener Männer nicht anerkennte, sondern bloß, weil die meisten ihrer Lehrbücher mir entweder für die Bedürfnisse unsers Institutes zu reichhaltig, oder nicht ganz passend für den militärischen Gesichtspunct schienen, da die meisten derselben doch größtentheils für academische Zuhörer, und nicht zunächst für militärische Zöglinge, berechnet sind.

Nichtsdestoweniger aber habe ich es für Pflicht gehalten, das für uns Brauchbare und Zweckmäßige in den Schriften jener trefflichen Männer, in eine solche Ordnung, die mir, nach mehrjähriger Erfahrung, für uns die beste schien, zusammen zu stellen, und von neuen zu einem eigenen Ganzen zu verarbeiten; daher ich denn auch die schätzbaren Arbeiten eines Kästner, Karsten, Unterberger, Grüson, Krebs, Meinert ꝛc., aus welchen Quellen ich bei diesem ersten Theile geschöpft habe, mit Achtung und Dankbarkeit nenne.

Arithmetik und Geometrie, die in diesem ersten Theile enthalten sind, habe ich deswegen in zwei Abtheilungen gebracht, weil jede, nach der Verfassung unsers Instituts, die Individuen der

untern

untern Classen, während eines Cursus, einzeln beschäftiget.

Sollte ich durch meine Bemühungen so glücklich seyn, zur Bildung vaterländischer junger Krieger beizutragen; so werde ich dieses für die höchste Belohnung meiner Arbeit halten.

Dresden,
im May 1811.

In-

Inhalt
der ersten Abtheilung,
welche
den ersten Kursus, die Arithmetik und Buchstabenrechnung
enthält.

Einleitung in die mathematischen Wissenschaften überhaupt. §. I. – IX.

Erster Abschnitt.

Von den Verrichtungen und Eigenschaften der Zahlen überhaupt.

Erstes Kapitel. Erklärungen und Grundsätze. §. 1—12.

Zweites Kapitel. Von der Bezeichnung und Bedeutung der Zahlen. §. 13—17.

Drittes Kapitel. Von den vier Rechnungsarten mit unbenannten Zahlen, und von den Primzahlen. §. 18—52.

I. Addition. §. 18—21. II. Subtraction. §. 22—28. III. Multiplication. §. 29—33. IV. Division. §. 34—43. V. Primzahlen. §. 44—52.

Viertes Kapitel. Von den Brüchen überhaupt. §. 53—78.

Fünftes Kapitel. Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen. §. 79—93.

I. Addition. §. 79—80. II. Subtraction. §. 81—82. III. Multiplication. §. 83—87. IV. Division. §. 88—93.

Sechstes Kapitel. Von den zehntheiligen Brüchen. §. 94—104.

Siebentes Kapitel. Von der Reduction benannter Zahlen, und von den vier Rechnungsarten mit benannten, sowohl ganzen als gebrochenen Zahlen. §. 105 — 130.

I. Uebersicht und Eintheilung einiger Münzen, Maase und Gewichte. §. 106 — 110. II. Reduction auf kleinere oder größere Einheiten. §. 111 — 114. III. Addition. §. 115 — 116. IV. Subtraction. §. 117 — 119. V. Multiplication. §. 120 — 124. VI. Division. §. 125 — 130.

Zweiter Abschnitt.

Von der allgemeinen Arithmetik (Algebra).

Erstes Kapitel. Von den ersten Gründen der Buchstabenrechnung. §. 131 — 132.

I. Bezeichnung der Größen. §. 133 — 138. II. Begriff der entgegengesetzten Größen. §. 139 — 141.

Zweites Kapitel. Von den vier Rechnungsarten der zusammengesetzten Größen. §. 142 — 153.

I. Addition. §. 142 — 144. II. Subtraction. §. 145 — 147. III. Multiplication. §. 148 — 150. IV. Division. §. 151 — 153.

Dritter Abschnitt.

Von den Potenzen und deren Wurzeln.

Erstes Kapitel. Von den Potenzen und Wurzeln, und den vier Rechnungsarten derselben überhaupt. §. 154 — 170.

Zweites Kapitel. Von Erhebung der Größen zu Potenzen. §. 171 — 175.

Drittes Kapitel. Von Ausziehung der Wurzeln aus zusammengesetzten Größen.

I. Ausziehung der Quadratwurzel. §. 176 — 191.
II. Ausziehung der Cubikwurzel. §. 192 — 205.

Vierter Abschnitt.

Von der Analysis.

Erstes Kapitel. Von den Begriffen der Analysis, der Eintheilung und Reduction der Gleichungen überhaupt. §. 206 — 217.

I. Eintheilung und Begriffe der Gleichungen. §. 206 — 213.

II. Einfache bestimmte Gleichungen. §. 214 — 217.

Zweites Kapitel. Von der Auflösung algebraischer Aufgaben vom ersten Grade, mit einfachen bestimmten Gleichungen. §. 218 — 222.

Drittes Kapitel. Von der Auflösung algebraischer Aufgaben vom ersten Grade, mit mehreren unbekannten Größen, oder mit unbestimmten Gleichungen. §. 223 — 229.

Viertes Kapitel. Von Auflösung algebraischer Aufgaben vom zweiten Grade, oder von den sogenannten quadratischen Gleichungen. §. 230 — 236.

Fünfter Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

Erstes Kapitel. Von den Verhältnissen und Proportionen. §. 237 — 282.

I. Arithmetische Verhältnisse. §. 239.

II. Geometrische Verhältnisse. §. 240 — 243.

III. Proportionen überhaupt. §. 244 — 248.

IV. Arithmetische Proportionen insbesondere. §. 249 — 258.

V. Geometrische Proportionen insbesondere. §. 259 — 274.

VI. Zusammensetzung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen. §. 275 — 282.

Zweites Kapitel. Von den Progressionen. §. 283 — 294.

I. Arithmetische Progressionen. §. 283 — 291.

II. Geometrische Progressionen. §. 292 — 294.

Sechs-

Sechster Abschnitt.

Von den Logarithmen.

Erstes Kapitel. Von der Einrichtung der Logarithmen. §. 295—309.
Zweites Kapitel. Von dem Gebrauche der logarithmischen Tafeln. §. 310—318.

Siebenter Abschnitt.

Von den verschiedenen Arten der Proportionsrechnungen.

Erstes Kapitel. Von der einfachen Regel de Tri. §. 319—336.
I. Gerade einfache Regel de Tri. §. 320—331.
II. Umgekehrte einfache Regel de Tri. §. 332—336.
Zweites Kapitel. Von der zusammengesetzten Regel de Tri. §. 337—341.
I. Zusammengesetzte gerade Regel de Tri. §. 338—339.
II. Zusammengesetzte umgekehrte Regel de Tri. §. 340—341.
Drittes Kapitel. Von der Gesellschafts-, Vermischungs- und Theilungsrechnung. §. 342—350.
I. Gesellschaftsrechnung. §. 342—345.
A. Einfache Gesellschaftsrechnung. §. 343.
B. Zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung. §. 344—345.
II. Vermischungsrechnung. §. 346.
III. Theilungsrechnung. §. 347—348.
IV. Von einigen andern Proportionsrechnungen. §. 349.
A. Alligationsrechnung. §. 349.
B. Regula Falsi. §. 350.
Viertes Kapitel. Von der Reductionsrechnung. §. 351—368.
I. Einfache Reductionsrechnung. §. 354—364.
II. Zusammengesetzte Reductionsrechnung. §. 365—368.

Die

Ersten Theiles erste Abtheilung,

welche die

Arithmetik und Buchstabenrechnung,

oder

den ersten Kursus

der Vorbereitungswissenschaften

enthält.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Einleitung

in die mathematischen Wissenschaften überhaupt.

§. I.

Die Mathematik, deren Name Wissenschaft oder Unterweisung bezeichnet, beschäftiget sich mit der Betrachtung der Größe (Quantitas).

Anmerkung.

Vermuthlich hat man der Wissenschaft von der Ausmessung der Größen, (welche man auch Meßkunst zu nennen pflegt) um deswillen diesen Namen gegeben, weil sie wegen der Gewißheit, die man in keinem andern Theile der menschlichen Kenntniß so vollkommen, als in ihr, antrifft, den Namen einer Wissenschaft am meisten verdient.

§. II. Die Bestimmung eines Gegenstandes, wodurch gedacht werden kann, wie vielmal Eins in ihm gesetzt ist, heißt dessen Größe. Jeder Gegenstand, dem eine Größe zukommt, heißt eine Größe, (Quantum). Eine Größe, die mit vielen einerlei ist, wird ein Ganzes, und die vielen, welche mit dem Ganzen einerlei sind, werden Theile genannt, daher ist jede Einheit, die das Ganze bestimmen hilft, ein Theil. Jeder Gegenstand muß eine Größe haben, weil der Verstand dasjenige, was ohne alle Größe ist, nicht erkennen kann, also für ihn kein Gegenstand, d. i. Nichts ist. Wir stellen uns selbst in dem für uns unbestimmbaren Raume Räume vor, die zusammen genommen, zu einem Raume gehören, folglich denken wir uns den Raum ebenfalls als eine Größe. Demnach ist jede Größe einer Vermehrung und Verminderung fähig.

§. III. Die Größe einer Sache erkennet man entweder unmittelbar, (absolut), durch die Erscheinungen, die

zu unsern Sinnen gelangen, oder durch die Vergleichung mit einer andern schon bekannten Größe (relativ).

Diese letztere Beschäftigung heißt in der Mathematik überhaupt messen, und die dazu erwählte Größe das Maas oder der Maasstab.

Anmerkung.

Aus diesem Grunde heißt auch diese Wissenschaft die Meßkunst.

§. IV. Das Maas, womit ausgemessen wird, ist die Einheit, welche aber alle Zeit von einerlei Art mit der auszumessenden Größe seyn muß. Z. B. wollen wir die Länge eines Weges finden, so bedienen wir uns wieder einer andern Länge, z. B. der Schritte, Fuß, Meilen ꝛc. und untersuchen nun, wie viel mal eine dieser Größen in der Länge des Weges enthalten ist.

Untersuchen wir das Gewicht einer Sache, so bedienen wir uns der Zentner, Pfunde, Lothe ꝛc. zur ausmessenden Einheit.

Wollen wir den Werth eines Geldhaufens bestimmen, und gleichsam denselben ausmessen, so bedienen wir uns der Thaler, Groschen, Pfennige u. s. w.

§. V. Die unmittelbare Messung erfordert nicht allezeit viel Geschicklichkeit, zumal wenn keine große Genauigkeit verlangt wird. So kann jeder einen Weg mit Schritten ausmessen. Aber, eine Größe mit einem gegebenen Maase zu vergleichen, ohne daß man es wirklich an sie anbringt, z. B. die Breite eines Flusses, die Entfernung zweier Gegenstände zu bestimmen, ohne daß man sie unmittelbar mißt, ist schwerer, und die Vergleichung muß durch bloße Schlüsse geschehen, auch wenn man die Gegenstände nicht unmittelbar mit den Sinnen empfindet. Die Mathematik enthält aber eigentlich solche Lehren, vermittelst derer die Größen sich durch Schlüsse vergleichen lassen; obgleich zu ihrer Anwendung auf sinnliche Größen auch unmittelbare Messungen erfordert werden. Da sich nun diese Vergleichungen alle auf die Größe einschränken; so heißt die Mathematik auch: die Größenlehre.

§. VI. Betrachten wir eine Größe, ohne sie auszumessen, so können wir uns von derselben nie einen zuverlässigen

läßigen Begriff machen. So können wir z. B. wohl wissen, daß ein Weg länger als der andere, dieser Haufen Geld größer als der andere ist; allein der bestimmte Begriff läßt sich nur durch das Ausmessen oder Auszählen beider Größen erfahren.

§. VII. Die Größe läßt sich, von allen andern Eigenschaften einer Sache abgesondert, blos als eine Menge von Theilen, als ein Ganzes, (Totum,) betrachten; und dieses thut die reine Mathematik, (Größenlehre, Mathesis pura, abstracta); oder man betrachtet zugleich die andern Eigenschaften der Sache mit, bei denen sich die Größe befindet, wie in der sogenannten angewandten Mathematik, (Mathesis applicata). Beide Abtheilungen begreifen die Wissenschaft der ausgedehnten Größen.

A) Zur reinen Mathematik rechnet man:

1) die Arithmetik. Sie betrachtet die Größen nur überhaupt in Absicht der Theile oder Einheiten, welche dieselbe ausmachen, ohne darauf zu sehen, ob sie in einer Verbindung unter einander stehen; z. B. bei einem Pfunde altes Eisen siehet man nicht auf die Ordnung der Theile, sondern nur darauf, daß sie ein Pfund ausmachen. Man drücket die Größe entweder in Zahlen, oder in allgemeinen Ausdrücken, z. B. in Buchstaben, aus, woraus denn wiederum die zwei arithmetischen Wissenschaften, nämlich;

a) die gemeine, (vulgaire) und
b) die allgemeine, oder Buchstabenrechnung entstehen.

2) die Geometrie, wo die Größen als Linien, Flächen und Körper ausgedrückt, und die Zusammensetzung ihrer Theile, und der Raum, welchen sie einnehmen, untersucht wird. Diesem Begriffe der Geometrie g[illegible]äß nennen sie auch einige neuere Mathematiker in ihren Vorlesungen Raumbegränzungslehre. Sie theilet sich;

a) in die niedere, und
b) in die höhere ein.

Die niedere handelt blos von geraden Linien, Kreisen, und davon abhangenden Flächen und Körpern, woraus auch die Eintheilung in die Längen-, Flächen- und Körpermeßkunst entstanden ist. Die Trigonometrie oder Dreieckmeßkunst, als die Wissen-

schaft,

schaft, welche die Dreiecke besonders abhandelt, ist auch ein Theil der niedern Geometrie.

Die höhere handelt von den Kegelschnitten, und den daraus entstehenden Parabeln, Hyperbeln, Ellipsen und andern krummen Linien.

3) Die Analysis, oder die Wissenschaft, unbekannte Größen, die man als bekannt annimmt, aus ihrem Verhältnisse gegen bekannte zu finden, zerfällt in mehrere Abtheilungen:

a) die ältere. Von dieser ist wenig übrig.

b) die neuere. Hier werden die Größen als Zahlen betrachtet, aber allgemeiner bezeichnet. Die Verhältnisse derselben werden auf Gleichungen (Aequationen) gebracht und berechnet; daher die Algebra, oder die Kunst Gleichungen aufzulösen. Nach der Beschaffenheit der Größen gibt es:

aa) die Analysis des Endlichen. Anwendungen auf Geometrie und Trigonometrie haben die Namen: analytische Geometrie und analytische Trigonometrie verursacht.

bb) die Analysis des Unendlichen, und diese theilet sich wieder in:

a) die Differential- und

b) die Integralrechnung ein.

Die Analysis und ihre Anwendungen begreift man unter dem allgemeinen Namen: höherer Mathematik.

cc) die Combinationslehre, erstreckt sich auf die ganze niedere und höhere Mathematik; sie gibt Regeln an, wie man weitläuftige Rechnungsarten auf die kürzeste und leichteste Art entwickeln kann, und ist von unübersehbarem Nutzen.

B) Angewandte Mathematik. Sie erhält ihren Namen daher, daß sie jene Lehren auf wirkliche Dinge selbst anwendet. Hieher kann schon die Anwendung der allgemeinen arithmetischen Vorschriften auf Fragen, die in der Hauswirthschaft, im Handel ꝛc. vorkommen, gerechnet werden. Außerdem entstehen Anwendungen der Arithmetik, welche nur für gewisse Lebensarten brauchbar sind, z. B. kaufmännische Rechnungen.

Von der Geometrie ist eine einfache Anwendung das Feldmessen. Zum Feldmessen aber werden, außer den mathe-

mathematischen, noch andere Kenntnisse erfordert; daher manche auch das Feldmessen zur technischen Mathematik rechnen.

Wichtigere Anwendungen der reinen Mathematik hat man bis jetzt auf die Kräfte der Körper, das Licht und die Himmelskörper gemacht. Daraus sind folgende Wissenschaften entstanden:

1) die Dynamik. Sie betrachtet die Kräfte der Körper überhaupt, — Hydrodynamik — betrachtet die Kräfte der flüssigen Körper insbesondere. Sie enthalten:

a) die Statik — untersucht die Gesetze der Körper, unter welchen sie ein Gleichgewicht bewirken.

Hydrostatik — untersucht eben dies in Rücksicht auf flüssige Körper.

b) die Mechanik betrachtet die Kräfte der Körper in der Bewegung.

aa) Hydraulik — untersucht eben dieses in Rücksicht der flüssigen elastischen Körper.

bb) Aerostatik handelt von den Gesetzen des Gleichgewichts flüssiger Körper.

Aeromechanik betrachtet hingegen die Kräfte dieser Körper in der Bewegung.

cc) Geschützwissenschaft, und insbesondere die Artillerie, welche lehret, wie nicht allein die Wirkung des entzündeten Schießpulvers auf die Geschützkugeln berechnet, sondern auch die Bahn der letztern nach ihrer Gestalt und Größe verzeichnet und ausgemessen werden kann.

dd) die Taktik, welche die besondern Stellungen und Bewegungen der Truppen, der Kriegsmaschinen und des Gepäckes ordnen lehret.

ee) die Lagerwissenschaft.

2) Die Optik enthält die auf das Licht angewandte Mathematik.

a) die besondere Optik handelt von dem gerade fortgehenden Lichte.

Ein Anhang dazu ist:

die Perspektive, welche eine jede Figur so zeichnen lehret, wie sie sich dem Auge in gewissen Entfernungen darstellet.

b) Katoptrik, welche von dem, von Spiegeln zurückgeworfenen,

c) Die

c) Dioptrik, die von dem, in durchsichtigen Materien gebrochenen Lichte handelt.

3) Die Astronomie ist die Lehre von der Bewegung und dem Laufe der Himmelskörper. Sie theilet sich in die theoretische und sphärische. Von ihr hangen ab:

a) die mathematische Geographie, welche die Größe, Figur und Abtheilung der Erde lehrt. Ein Hauptstück davon ist die Lehre von Vermessung ganzer Länder. Hierher kann auch die Hydrographie oder Schiffskenntniß gerechnet werden.

b) die mathematische Chronologie, oder die Abtheilung der Zeit, nach dem Laufe der Himmelskörper.

c) die Gnomonik, welche die Abtheilung der Zeit in kleinere Theile durch Hülfe des Schattens lehret.

Außer den hier erwähnten, verdienen noch die Bauwissenschaften angeführet zu werden, da sie Anleitung geben, wie nach Regeln der Festigkeit, Bequemlichkeit und Schönheit gebauet werden soll. Man führt sie auch unter dem Namen der praktischen, einige auch unter dem Namen der technischen Mathematik auf, da zu ihrer Ausübung Kenntnisse aus der Physik, Chemie, Naturgeschichte, dem Kameralwesen und der Haushaltungskunst entlehnt werden müssen.

Diese praktische oder technische Mathematik enthält also:

1) den Wasserbau, (Hydrotechnik) wozu der Wehr-, Schleusen-, Teich-, Damm- und Brükkenbau gehöret.

2) den Landbau. Dieser enthält:

a) die Civilbauwissenschaft. Nach den verschiedenen Absichten hat man:

aa) die kameralistische, und

bb) die ökonomische oder landwirthschaftliche Bauwissenschaft.

b) die Militairbauwissenschaft.

Die vorzüglichste Anwendung auf eigentliche militärische Gegenstände enthält die Befestigungswissenschaft. Theile derselben sind:

aa) die Festungsbaukunst, und

bb) die Feldverschanzungskunst.

3) Die Schiffsbauwissenschaft.

4) Die praktische Maschinenlehre, welche ebenfalls

falls noch in besondere Theile zerfällt, z. B. Mühlen-, Kriegsmaschinenbau rc.

Anmerkung.

Es gibt noch mehrere Zweige der angewandten Mathematik, welche aber eigentlich zur Wissenschaft der unausgedehnten Größen gehören. Z. B.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnungswissenschaft. Hier macht man Anwendungen der Arithmetik auf die Berechnung der Sterblichkeit der Menschen, Leibrenten, Tontinen rc. und bestimmt nach Regeln der Wahrscheinlichkeit den Wachsthum eines Staats an Bürgern.

Die Theorie der Musik, die Pyrometrie oder Feuermeßkunst, die für den Juristen nöthige Mathesis Forensis, die dem Jäger unentbehrliche Forstgeometrie u. s. w. gründen sich ebenfalls auf die Mathematik.

§. VIII. Die zusammenhangende Ordnung in dem Vortrage mathematischer Lehren heißt: die mathematische Lehrart oder Methode. Das Wesentliche dieser Methode besteht darin, daß in derselben alle Sätze aus unumstößlichen Gründen, durch eine Schlußfolge, in der vollkommensten Ordnung, und in einem nothwendigen Zusammenhange, überzeugend hergeleitet werden.

§. IX. Die mathematische Lehrart bestehet:

I. aus Erklärungen (Definitionen). Diese geben deutliche und bestimmte Begriffe von den abzuhandelnden Gegenständen. Sie sind:

1) Sacherklärungen (Realdefinitionen) als solche, aus welchen sich begreifen läßt, wie eine Sache möglich sey. ferner,

2) Worterklärungen (Nominaldefinitionen).

II. Aus Sätzen.

Die mathematischen Sätze sind entweder theoretisch oder praktisch.

Ein theoretischer Satz zeigt blos an, daß eine Sache so und nicht anders beschaffen sey; ein praktischer hingegen verlangt, daß etwas zu Stande gebracht werden soll.

1) Ist die Richtigkeit eines Satzes so an sich klar und deutlich, daß man dieselbe sogleich einsehen kann, z. B. jede Größe ist sich selber gleich, so heißt er ein Grundsatz (Axiom).

2) Fordert der Satz, daß man eine Sache verrichten könne,

könne, ohne die Art, wie es geschehen soll, zu zeigen, weil solche vielleicht zu offenbar in die Augen fällt, so heißt er ein Heischesatz, Forderung, (Postulat), z. B. von einem Puncte bis zum andern eine gerade Linie zu ziehen. Diese Art rechnet man zu den praktischen Sätzen.

3) Ist die Richtigkeit eines solchen Satzes nicht unmittelbar einleuchtend, so heißt er, wenn er theoretisch ist, ein Lehrsatz (Theorem).

4) Verlangt der Satz, daß etwas bewerkstelligt werden soll, so entstehet die Aufgabe, welche theoretisch oder praktisch seyn kann. Der Gegenstand einer theoretischen Aufgabe ist die Bestimmung eines Verhältnisses, einer Eigenschaft, Ursache, Wirkung rc.; z. B. das Verhältniß des Durchmessers eines Zirkels zu finden. Eine praktische Aufgabe führt allezeit auf eine Verrichtung.

Jede Aufgabe fordert eine Auflösung, (Solution), d. h., die Art oder das Verfahren, wie das Verlangte bewerkstelliget wird. Die hierzu nöthigen Stücke heißen: Data, welche wieder eine gewisse Ordnung (Konstruction) verlangen.

5) Erfahrungssätze beruhen auf dem Zeugnisse der Sinne.

6) Ein willkührlicher Satz (Hypothese) ist ein ohne Beweis angenommener, z. B. daß man in der Arithmetik Zeichen für die Zahlen ausgedacht hat, und von 1 bis 10 zählet.

7) Ein Lehrsatz (Lemma) ist ein solcher Satz, der eine Wahrheit behauptet, aber durch einen Beweis unterstützt werden muß.

8) Anmerkungen (Scholien) werden diejenigen Sätze genannt, die nichts Wesentliches von den abzuhandelnden Sachen enthalten, sondern nur der Erläuterung oder litterarischen Notiz wegen hinzugesetzt werden.

III. Aus Beweisen (Demonstrationen). Ein Beweis ist aber überhaupt nichts anders, als eine Kette nach den Regeln der Logik zusammenhangender und aufeinanderfolgender Vernunftschlüsse.

1) Der Beweis eines Lehrsatzes überzeugt uns also von der Wahrheit desselben, und

2) der Beweis einer Aufgabe enthält die Gründe ihrer Auflösung und überzeugt uns von der Richtigkeit des Verfahrens.

Die Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Von den Verrichtungen und Eigenschaften der Zahlen überhaupt.

Erstes Kapitel.

Erklärungen und Grundsätze.

Erklärungen.

§. 1.

Jede Größe, die für sich bestehend betrachtet wird, nennt man die **Einheit**. Nimmt man nun eine Menge Einheiten von einerlei Art zusammen, so entstehet eine **Zahl**.

Anmerkung.

Die Wahl der Einheit ist verschieden. Ein jeder wählt sie nach seinen Absichten, z. B. der Feldmesser wählt Ruthen oder Fuß ꝛc. Eine Menge Thaler haben zu ihrer Einheit einen Thaler. Ein Thaler aber kann wieder als eine Menge Groschen angesehen werden, und dann ist der Groschen die Einheit ꝛc.

§. 2. Man theilet die Zahlen in **ganze** und **gebrochene** oder **Brüche** ein.

Eine **ganze Zahl** entstehet, wenn man die völlige Einheit etlichemal nimmt. Eine **gebrochene Zahl** oder ein **Bruch** hingegen entstehet, wenn man nur ei-

nen

nen oder etliche Theile des Ganzen nimmt. Z. B. 8 Thaler ist eine ganze Zahl, $\frac{3}{4}$ eines Thalers ein Bruch.

Zahlen, die aus ganzen und gebrochenen zusammengesetzt sind, heißen: vermischte Zahlen.

Anmerkung.

Eine oder eben dieselbe Größe kann aber öfters sowohl eine ganze Zahl, als auch ein Bruch seyn, nach Beschaffenheit derjenigen Größe, so zur Einheit erwählet worden. Z. B. einen Gulden kann man sich sowohl als 16 Groschen, als auch als $\frac{2}{3}$ eines Thalers vorstellen.

§. 3. Wenn bey einer Zahl angezeigt wird, was die Einheit für ein Ding ist, so heißt sie: eine benannte Zahl. Z. B 6 Kanonen, 5 Kugeln 2c. Zeigt man aber nur die Menge der Einheiten an, so heißen sie: unbenannte Zahlen. Z. B. 6, 5, 3, 2c.

§. 4. Die Größen oder Zahlen sind entweder homogen oder heterogen. Homogene oder gleichartige Größen bestehen aus Einheiten einerlei Art; heterogene oder ungleichartige hingegen aus Einheiten von verschiedener Art.

So sind 8 Thaler und 3 Thaler gleichartig, hingegen 5 Thaler und 7 Meilen ungleichartig. Eben so 2 Thaler und 6 Groschen. In diesem Falle aber können 2 Thaler und 6 Groschen gleichartig werden, weil die eine aus Theilen von der andern bestehet.

§. 5. Die Arithmetik überhaupt ist die Wissenschaft, aus einigen gegebenen bekannten Größen und Zahlen andere unbekannte zu finden.

Z. B. Man soll eine Zahl finden, die so groß ist als 4 und 2, so ist die Eigenschaft der unbekannten Zahl diese; daß sie so groß als beide zusammen seyn soll.

Wer=

Werden die Größen mit Buchstaben bezeichnet, so heißt solches die Buchstaben-Rechenkunst; dieses sind allgemeine Ausdrücke, unter welchen man sich jede Zahl vorstellen kann.

Werden sie aber mit Ziffern angedeutet, so entstehet die gemeine oder vulgaire Rechenkunst.

Anmerkung.

Die Arithmetik wird gemeiniglich die Rechenkunst oder Rechnungswissenschaft genannt, und unter diesem Namen in den Rechenbüchern vorgetragen, wohl deswegen, weil jede Veränderung, die mit den Zahlen vorgenommen wird, mit dem Worte rechnen bezeichnet wird.

§. 6. Jede Veränderung, die man mit den Zahlen vornehmen kann, ist entweder eine Vermehrung oder Verminderung, und dieses liegt im Begriffe derselben. (§. 1.) Soll man nun unbekannte Zahlen finden; (§. 5) so geschiehet es durch diese beiden Veränderungen, und die Art und Weise, wie man diese Veränderungen vornehmen kann, heißt: eine Rechnungsart (Species arithmetica). Eigentlich sind nur zwei Rechnungsarten in der Natur der Zahlen gegründet, nämlich: die Addition und die Subtraction.

Bei der Addition vermehrt man eine Zahl um ein oder mehrere gegebene Zahlen, so wie man sie bei der Subtraction um so viel vermindert, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält.

Da man aber eine Zahl mehreremal einer andern zusetzen, oder von einer gegebenen Zahl mehreremal wegnehmen kann; so hat man für den ersten Fall die Multiplication, und für den letzten die Division eingeführt, die aber ihren Grund in der Addition und Subtraction haben; daher zählet man vier Rechnungsarten, nämlich: aus der Vermehrung entspringen die Addition und Multiplication; aus der Vermindes

minderung hingegen die Subtraction und Division.

Anmerkung.

Eine und eben dieselbe Zahl kann nicht zugleich vermehrt und vermindert werden, weil dieses zwei entgegengesetzte Dinge sind.

§. 7. Vergleicht man zwei Zahlen mit einander, so untersucht man, ob beide gleich oder ungleich sind. Ueberhaupt sind zwei Dinge einander gleich, wenn sie in Absicht ihrer Größe einerlei sind, so daß jedes die Stelle des andern vertreten kann. Ist dieses aber nicht, so sind sie ungleich groß. Ein Paar unbenannte Zahlen sind gleich groß, wenn sie beide aus einerlei Menge, ungleich groß, wenn sie nicht aus einerlei Menge Einheiten bestehen.

Vergleicht man aber benannte Zahlen mit einander, so muß man sie nicht bloß nach der Menge, sondern auch nach dem Werthe der Einheiten, untersuchen. So sind z. B. 6 Thaler und 6 Groschen den Zahlen, aber nicht dem Werthe der Einheiten nach, einerlei; folglich, als benannte Zahlen betrachtet, ungleich.

§. 8. Die Arithmetik beschäftigt sich überhaupt mit der Größe, insofern sie als ein Ganzes betrachtet wird, das aus Theilen bestehet, wovon man mehrere oder wenigere nehmen kann, die aber, alle zusammen genommen, für das Ganze gesetzt werden können.

So ist z. B. ein Regiment Soldaten ein Ganzes, das aus Theilen oder einzelnen Soldaten bestehet, welche alle zusammen für das Ganze oder Regiment gesetzt werden können.

Um die Gleichheit zweier Größen auszudrücken, hat man das Zeichen (=) anstatt des Wortes gleich gewählt, welches zwischen beide gleiche Größen gesetzt wird. Z. B. A=B.

Sind

Sind die Größen ungleich, so ist eine von beiden die größere, und die andere die kleinere. Diese Ungleichheit zweier Größen wird durch das Zeichen ($<$) angezeigt, da denn die Oeffnung gegen die größere, und die Spitze gegen die kleinere Größe zu stehen kommt.

Z. B. $A > B$. Hier ist A größer als B.

Allgemeine Grundsätze.

§. 9. Jede Größe ist sich selbst gleich, und statt der einen kann man allezeit eine andere, die ihr gleich ist, setzen.

Ein Thaler = Ein Thaler.

§. 10. Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich, und folglich sind ein oder etliche Theile allezeit kleiner als das Ganze.

Ein Thaler = vier und zwanzig Groschen.
Ein Thaler > ein Groschen.
Ein Thaler > zwölf Groschen.

§. 11. Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

Eine Ruthe = zehn Fuß.
Zehn Fuß = hundert Zoll; also auch:

Eine Ruthe = hundert Zoll.

§. 12. Wenn eine Größe größer oder kleiner ist, als eine von zwei gleichen Größen, so ist dieselbe auch größer oder kleiner als die andere.

Ein Thaler = vier und zwanzig Groschen.
Ein Dukaten > ein Thaler; also:

Ein Dukaten > vier und zwanzig Groschen.

Ein Gulden = sechszehn Groschen.
Ein Pfennig < ein Gulden; also:

Ein Pfennig < sechszehn Groschen.

Zweites Kapitel.

Von der Bezeichnung und Bedeutung der Zahlen.

Willkührlicher Satz.

§. 13. Damit in einer Zahl die Menge der Einheiten deutlich vorgestellt und bestimmet werden könne, so wird allezeit eine bestimmte Anzahl von Einheiten wieder als ein Ganzes betrachtet, und als eine neue Einheit angesehen; denn, wenn eine jede Zahl ihren eigenen Namen oder Zeichen erhalten sollte, so würde man in große Weitläuftigkeiten verwickelt werden; daher man nur wenige Zeichen und Namen gewählt hat, vermittelst welcher man sie einzeln gebraucht, oder zusammengesetzt, jede Zahl und ihren Werth bezeichnen kann.

Diese Zeichen, welche man Ziffern (Zahlzeichen) heißt, sind folgende:

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Null.	Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs.	Sieben.	Acht.	Neun.

Das Zeichen Null hat für sich keinen Werth, sondern füllt bloß leere Stellen.

Nach der uns von Jugend auf bekannten Art zählt man von Eins bis Zehn. Diese Zehn entstehet aber, wenn man zu Neun noch eine Einheit hinzufügt.

Alsdann fängt man von neuen an, nur mit dem Unterschiede, daß man die ersten Zehn beibehält, und eine

eine Einheit nach der andern hinzusetzt, und so entstehen die Zahlzeichen: Eilf (11), Zwölf (12), Dreizehn (13) 2c.

Betrachtet man die Zehn wieder als eine Einheit, so heißen 2 Zehner, zwanzig (20), 3 Zehner, dreißig (30) 2c. Kommt zu 9 Zehnern noch eine Zehn hinzu, so sagt man hundert (100), und so sagt man anstatt:

man anstatt:	das Wort
zehnmal hundert,	Tausend,
tausendmal tausend,	Million,
tausendmal tausend Millionen,	Billion,
tausendmal tausend Billionen,	Trillion 2c.

Die ersten 9 Zahlzeichen nennt man aber Einer, bis hundert Zehner, bis tausend Hunderte 2c.

Erklärung.

§. 14. Um also mit diesen wenigen Zeichen alle mögliche Zahlen anzuzeigen, so giebt man ihnen, außer dem eigenthümlichen Werthe, noch einen besondern, nach der Verschiedenheit ihrer Stellen, welche man von der rechten nach der linken Hand zählet, dergestalt, daß ein jedes Zahlzeichen in der folgenden Stelle zehnmal mehr als in der vorhergehenden andeutet; z. B. in der ersten bedeutet sie Einheiten, in der zweiten Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende 2c. Ueberhaupt bestimmt sich ihr Werth in folgender Ordnung:

In der ersten Stelle	Eins oder eine Einheit	1
" " zweiten "	zehn oder zehn Einheiten	10
" " dritten "	hundert " "	100
" " vierten "	tausend " "	1000
" " fünften "	zehntausend " "	10000
" " sechsten "	hunderttausend "	100000
" " siebenten "	eine Million "	1000000
" " achten "	zehn Millionen "	10000000
" " neunten "	hundert M. "	100000000
" " zehnten "	tausend M. "	1000000000
" " eilften "	zehntausend M. "	10000000000

In der zwölft. St.	hunderttaus. Mill.		100000000000
• •	dreizehnt.	eine Billion	1000000000000
• •	vierzehnt.	zehn Billionen	10000000000000
• •	funfzehnt.	hundert •	100000000000000
• •	sechszehnt.	tausend •	1000000000000000
• •	siebzehnt.	zehntausend	10000000000000000
• •	achtzehnt.	hunderttausend •	100000000000000000
• •	neunzehnt.	eine Trillion •	1000000000000000000

Wenn in der Zahl Einheiten von einer gewissen Gattung fehlen, so wird diese Stelle mit einer (0) Null ausgefüllet, damit die Ziffern ihren erforderlichen Werth bekommen. Z. B. in der Zahl 608 bedeutet die Null den Abgang von Zehnern, in 8030, den Abgang der Einer und Hunderte ꝛc.

Eben so würde 100,000 nicht Hunderttausend bedeuten, wenn nicht 5 Nullen da wären, damit die Ziffer 1 in die 6te Stelle komme und ihren Werth erhalte. Verstehet man dieses gehörig, so ist man auch im Stande, eine jede Zahl durch diese Zeichen richtig zu schreiben und gehörig auszusprechen, welches in der Arithmetik Numeriren heißt.

Zusatz.

§. 15. Die Zahlen und ihre Werthe, nach den angenommenen Sätzen, von 1 bis 10, zählen, so, daß 10 Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächst höhern ausmachen, nennt man das Zahlensystem nach Decimalordnungen, oder das dekadische System.

Aufgabe.

§. 16. Eine mit Zahlzeichen geschriebene Zahl zu lesen, oder auszusprechen.

Auflösung.

Man theile die Zahl von der rechten nach der linken Hand dergestalt ein, daß man die Stelle der Tausende allezeit mit einem Komma, die Millionen mit einem Puncte, die Billionen mit zwei Puncten bezeichnet, und

und nun jede Ziffer nach dem Werthe ausspricht, welchen sie durch ihre Stelle erhalten hat. Z. B. die Zahl

8	3	2	4	3	8	2	9	4	3	8	4	0	6	0	4	0	7	3	6	8
Hunderte	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer
Trillionen.			tausende von Billionen.			Billionen.			tausende von Millionen.			Millionen.			Tausende.			einfache.		

Achthundert und zwei und dreißig Trillionen, vierhundert, acht und dreißig tausend, zweihundert und vier und neunzig tausend Billionen, dreimalhundert und vier und achtzig tausend und sechzig Millionen, viermal hundert und sieben tausend, dreihundert und acht und sechzig.

In dieser Zahl fehlen also die Zehntausende, die Einer und Hunderte der Millionen, welche mit Nullen ausgefüllt sind, weil sonst diese Zahl von ihrem Werthe verlieren müßte.

Aufgabe.

§. 17. Eine gegebene Zahl recht zu schreiben.

Auflösung.

Man bestimmt, nach der Größe der aufgegebenen Zahl und der größten darin enthaltenen Einheit, die erforderlichen Classen, und die Stellen in selbigen durch Puncte; die Millionen, Billionen rc. bemerkt man durch die im vorigen angegebenen Zeichen, und setzt sodann die Ziffern, nach ihrem Werthe, in ihre gehörigen Stellen, und füllet die mangelnden mit einer Null (0) aus.

Z. B. vorige Zahl zu schreiben, könnte folgendergestalt geschehen:

832 ⁝ 438294 ⁚ 384060 · 407368.

Anmerkung.

Die Römer bedienten sich folgender Zahlzeichen, deren wir uns auch noch in manchen Fällen bedienen, als:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	X.	L.	C.	D.	M.
Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs.	Zehn.	Funfzig.	Hundert.	Fünfhundert.	Tausend.

und so wird folgende, mit Römischen Ziffern geschriebene Zahl ausgesprochen:

MDCCCII. auch MCCMII.

Eintausend, achthundert und zwei.

Drittes Kapitel.

Von den vier Rechnungsarten mit ganzen unbenannten Zahlen, und von den Primzahlen.

I. Addition.

§. 18. Die (§. 6.) erwähnten vier Rechnungsarten können sowohl mit unbenannten als mit benannten Zahlen Statt finden.

In diesem Kapitel werden wir uns mit den unbenannten beschäftigen.

Erklärung.

§. 19. Die Addition lehret: aus gegebenen Zahlen oder Größen, welche man die zu addirenden oder zu summirenden Zahlen nennet, eine andere finden, die allen gegebenen zusammengenommen gleich ist.

Diese Zahl wird die Summe (Aggregat) genannt. Das Zeichen der Addition ist (+), welches durch plus oder mehr ausgesprochen, und zwischen die gegebenen Zahlen gesetzt wird. Z. B. 8+2.

Aufgabe.

§. 20. Unbenannte Zahlen zu addiren.

Auflös.

Auflösung.

Die meisten Zahlen, welche addiret werden sollen, sind aus Einern, Zehnern, Hunderten rc. zusammengesetzt, und können, wegen ihrer Größe, nicht auf einmal addiret werden.

Man setzet daher die gleichartigen Theile derselben, nämlich die Einer, Zehner, Hunderte rc. unter die Einer, Zehner, Hunderte rc. Z. B. Es sollen folgende Zahlen, 3458, 457, 1832, 4378 und 37 addiret werden, so stehet das Exempel:

$$\left.\begin{array}{r} 3458 \\ 457 \\ 1832 \\ 4378 \\ 37 \end{array}\right\} \text{Addendi.}$$

Summa 10162

Nachdem man unter die zu summirenden Zahlen einen Strich gezogen, so zähle man alle Einer zusammen, und bemerke, wie viel selbige Zehner ausmachen. Z. B. hier, 3; die übrigen Einer, nämlich 2, setze man in die Einerstelle unter den Strich, und die bemerkten 3 Zehner zähle man zu den Zehnern. Hier merket man ebenfalls an, wie viel Hunderte die Zehner ausmachen, nämlich hier, 2; die übrigen Zehner, als hier, 6, setzet man wieder unter den Strich an die Zehnerstelle, und so fährt man bis zu Ende fort, wo man alsdann die Summe aller Zahlen erhält.

Grundsätze.

§. 21. 1) Gleiches zu Gleichem addiret, giebt gleiche Summen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 9 = 5 + 4 \\ \text{und } 3 = 2 + 1 \end{array}$$

$$\text{so ist} \left\{ \begin{array}{l} 9 + 3 = 5 + 4 + 2 + 1 \\ 12 = 12 \end{array} \right\},$$

2) Zu dem Größern und zu dem Kleinern aber gleiches addirt, giebt, im ersten Falle, eine größere, im letztern aber, eine kleinere Summe. Z. B.

$$\begin{array}{r} 12 > 8 \\ \text{und}\ 4 = 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{so ist} \left\{ \begin{array}{c} 12 + 4 > 8 + 4 \\ 16 > 12 \end{array} \right\}$$

Beyspiele zur Uebung.

I. Nach Tempelmanns Angaben enthält:

Europa	171834	geogr. □ Meilen.
Afrika	531683	" " "
Asien	641092	" " "
Nordamerika	231192	" " "
Südamerika	340917	" " "
Diese 4 Welttheile enthalt. also	1916718	geogr. □ Meilen.

II. In einem Gefechte verlor eine Armee:

230	Curassier,
76	Dragoner,
134	Artilleristen,
468	Mann Infanterie, und
157	Husaren,
1065	Mann ist der ganze Verlust.

III. Die höchste Brockenspitze steht über der Heinrichshöhe oder dem Brockenwirthshause, 326 Fuß, — dieses über Göttingen, 2500, — Göttingen über Hannover, 420, — Hannover über der Ostsee, 243, — die Ostsee über dem mittelländischen Meere, 83 Fuß. Wie viel Fuß ist also die Spitze des Brocken über dem mittelländischen Meere erhaben? 3572 Fuß.

IV. Nach Berechnungen hat der siebenjährige Krieg an Menschen gekostet: Preußen 180080; — den mit Preußen verbundenen Mächten, England, Hessen, 16000. Oestreich, 140000; den mit Oestreich verbundenen Mächten, nämlich Rußland, 120000, dem deutschen Reiche, 28000, — Schweden, 25000, und Frankreich, 200000. Wieviel zusammen? 709080 Menschen.

II. Sub=

II. Subtraction.

Erklärung.

§. 22. Die Subtraction lehret: aus zwei gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche anzeigt, um wieviel Einheiten die eine von den gegebenen größer ist, als die andere.

Diese gefundene Zahl heißt der Rest, Unterschied oder Differenz.

Die Zahl, von welcher abgezogen wird, heißt der Minuendus; welche abzieht, der Subtrahendus.

Will man die Subtraction blos anzeigen, ohne wirklich zu subtrahiren, so bedient man sich des Zeichens (—), welches minus oder weniger ausgesprochen, und zwischen die Zahlen, welche abgezogen werden sollen, gesetzt wird. Z. B. 12 — 8.

Anmerkung.

Des Wortes Rest bedienet man sich da, wo man wissen will, wieviel von einer benannten Zahl übrig bleibt; Differenz aber, wenn man anzeigen will, um wieviel eine von zwei gegebenen Zahlen größer oder kleiner als die andere ist.

Aufgabe.

§. 23. Unbenannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

Die gleichartigen Zahlen werden, wie bei der Addition, gleichfalls unter einander, und zwar die kleinere unter die größere, gesetzt, und alsdann die Einer, Zehner rc. der untern Zahl, von den Einern, Zehnern rc. der obern abgezogen, und der übrig gebliebene Rest unter die gegebenen Zahlen, durch einen Strich abgesondert, gesetzt.

Z. B. Es soll von 789674, die Zahl 456242 abgezogen werden, so stehet das Exempel so:

789674 Minuendus,
456242 Subtrahendus,

333432 Differenz.

1) Zu-

1. Zusatz.

§. 24. Es kann der Fall eintreten, wo einige Zahlen im Minuendus kleiner, als im Subtrahendus sind, z. B.

```
 82932
 25367
 57565
```

Hier sollen 7 Einer von 2 Einern abgezogen werden; da dieses nun nicht möglich ist, so nimmt oder borget man von den folgenden 3 Zehnern eine Einheit, — welches durch einen Punkt angedeutet wird, welche (§. 13.) 10 Einer enthält, und zählet sie zu den 2 Einern, so erhält man 12 Einer, von welchen man nun 7 Einer bequem abziehen kann; der Rest wird alsdann, wie gewöhnlich, unter den Strich gesetzt. Da nun aber aus der Zahl 3 eine 2 geworden, und man 6 Zehner von 2 Zehnern wieder nicht wegnehmen kann, so borgt man von der folgenden Klasse der Hunderte wieder eine Einheit, welche wieder 10 Zehner ausmacht, und, zu den 2 Zehnern addiret, 12 Zehner giebt, wovon man nun die 6 Zehner subtrahiren und die Operation, wie vorher, fortsetzen kann.

2. Zusatz.

§. 25. Stehen in einigen Stellen des Minuendus Nullen, von welchen sich nichts wegnehmen läßt, wie z. B. in folgendem Beispiele: so muß von der Stelle, welche auf die Nullen folgt, eine Einheit genommen, und in die Stelle der Null gebracht werden, woselbst sie zehn gilt (§. 13.). Von dieser wird auf die vorige Art eine Einheit geborgt, und mit der Subtraction fortgefahren, wodurch aber in der Stelle der Nullen 9 übrig bleiben. Die Ziffer sowohl, welche um Eins verringert, als auch die Null, so in 9 verwandelt worden, werden mit einem Punkte bemerkt.

```
 8004603
 2462126
 5542477.
```

Folgen mehrere Nullen, z. B. bei obigem Exempel in der zehntausend und hunderttausend Stelle, da man denn die 6 zehntausende des Subtrahendus nicht subtrahiren kann; so borget man ebenfalls bei der nächstfolgenden

Zahl,

Zahl, hier 8 Millionen, eine Einheit und setzet selbige in die vorhergehende Stelle der Null, als der hunderttausend Stelle, da sie denn 10, nämlich 10 hunderttausend, gilt; von diesen 10 borgt man wieder eine Einheit und setzet sie in die vorhergehende Stelle der Null, da sie denn 10 gilt, in der hunderttausend Stelle aber nur 9 übrig bleiben. Man subtrahirt nun von letzterer 10 zehntausend die 6 des Subtrahendus und so ferner die 4 hunderttausend von den 9 hunderttausenden ꝛc., woraus man deutlich siehet, warum die Nullen in 9 verwandelt worden.

Grundsätze.

§. 26. 1) Gleiches von Gleichem subtrahiret, giebt gleiche Differenzen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 12 = 8 + 4 \\ \text{und } 8 = 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{so ist} \left\{ \begin{array}{c} 12 - 8 = 8 + 4 - 8 \\ 4 = 4 \end{array} \right\}$$

2) Von dem Größern und von dem Kleinern aber Gleiches subtrahiret, giebt, im ersten Falle, eine größere, im zweiten aber, eine kleinere Differenz. Z. B.

$$\begin{array}{r} 12 > 8 \\ \text{und } 4 = 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{so ist} \left\{ \begin{array}{c} 12 - 4 > 8 - 4 \\ 8 > 4 \end{array} \right\}$$

Beispiele zur Uebung.

I. Im Jahre 1759 führte Friedrich der Große zuerst die reitende Artillerie in seiner Armee ein; wie lange bedient man sich derselben?

II. Der sächsische Oberste Geitler erfand 1697, vor Brüssel, die Anzündebrändchen; wie lange bedient man sich derselben?

III. Der sächsische General Obenaus erfand die Geschwindstücke, deren man sich 1730, im Zeithayner Lager, zuerst bediente; wie lange ist dieses?

IV. Im

IV. Im Jahre 1640 bekam ein französisches Reiterregiment zuerst Feuergewehre, mit den noch jetzt üblichen französischen Schlössern, weswegen es auch Fusilire genannt wurde, und 1647 bediente man sich in den Niederlanden zuerst der Bajonnets; wie lange ist beides?

V. Die Buchdruckerkunst wurde zu Mainz, im Jahre 1440, durch Erfindung der beweglichen Buchstaben vervollkommnet; die Ferngläser 1590 durch einen Holländer, Jansen, erfunden; das erste Feuerschloß zu Nürnberg 1517 verfertiget; — das Porcellan zu Dresden 1706 von Böttcher erfunden; — die Gradierhäuser 1599, in Langensalza, von einem Arzte, Macht, eingeführt; die ersten Kartoffeln kamen nach Deutschland 1650; die reitenden und fahrenden Posten wurden 1641 durch Taxis im deutschen Reiche eingerichtet. Wie alt sind diese Erfindungen und Einrichtungen?

Proben für die Addition und Subtraction.

§. 27. Diejenigen Mittel, die man anwendet, um zu sehen, ob eine Operation richtig gemacht worden, wird ihre Prüfung oder Probe genannt.

Wenn eine Zahl zu einer andern addiret, und hernach wieder subtrahiret wird, so bleibt die Zahl unverändert; folglich heben die Addition und Subtraction einander gegenseitig auf, und dienen sich zur Probe.

I. Probe der Addition.

§. 28. Diese kann geschehen, wenn man immer eine Zeile nach der andern von der Summe abziehet; bleibt am Ende die letzte Zeile übrig, so ist das Exempel richtig.

II. Probe der Subtraction.

Will man die Probe auf die Subtraction machen; so bestehet diese (§. 27.) darin, daß man den gefundenen Rest zu dem Subtrahendus addiret; kommt nun der Minuendus heraus, so ist die Subtraction richtig. Wir wollen das Exempel aus §. 24. nehmen; als:

25367

25367 Subtrahendus,
57565 Rest.
giebt 82932, als den Minuendus.

III. Multiplication.

Erklärungen.

§. 29. Die Multiplication ist nichts anders, als eine abgekürzte Addition, für den Fall, wenn eine Zahl mehreremal zu sich selbst addiret werden soll, (§. 6) und lehret also: eine gegebene Zahl so viel mal nehmen, als eine andere Einheiten hat. Jene Zahl heißt der Multiplicandus, diese der Multiplicator. Beide heißen Factoren. Die Zahl, welche herausgekommen ist, heißt: das Product (Factum). Das Zeichen, durch welches die Multiplication bloß angezeigt wird, ist ein liegendes Kreuz (×), oder ein Punkt, (.), welcher zwischen die Factoren gesetzt wird, und heißt: multiplicirt. Z. B. 6×8.

Sind die Factoren durch die Addition oder Subtraction verbunden, so bringt man die Factoren in Parenthesen, und zwischen sie das Zeichen. Z. B. (6 + 4) × (8 — 3).

§. 30. Die Multiplication der zusammengesetzten Zahlen setzt die Multiplication der einfachen voraus, daher mit dieser der Anfang gemacht werden muß.

Nach der Erklärung der Multiplication (§. 6. und 29.) ist sie nichts anders, als eine wiederholte Addition. Z. B. die Zahl 6 sollte 3 mal genommen werden, so würde es geschehen, wenn man 6 dreimal zu sich selbst addirte, wodurch man 6 + 6 + 6 = 18 erhielte. Allein bei zusammengesetzten Zahlen würde dieses vielen Schwierigkeiten unterworfen seyn; man bedient sich daher mit größerm Vortheile folgender Tafel, welche von

von ihrem Erfinder die Pythagorische Tafel heißt, oder des sogenannten Einmaleins. Will man z. B. das Product 5×7 wissen, so suche man in der ersten Reihe die Zahl 5, und in der obersten die Zahl 7, gehe alsdenn von 7 gerade herunter bis in die fünfte Reihe, so trifft man daselbst das Product 35 an.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Aufgabe.

§. 31. Zusammengesetzte Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung.

Man setze den Multiplicator unter den Multiplicandus, ziehe darunter einen Strich, und multiplicire den Multiplicandus durch die Einer, Zehner, Hunderte ꝛc. des Multiplicators, setze die einzelnen Produkte in die ihnen zukommenden Stellen unter einander, und addire sie zusammen, so wird das Produkt die Einer, Zehner, Hunderte ꝛc., welche die Theile des Multiplicandus ausmachen, so viel mal in sich enthalten, als der Multiplicator Einheiten in sich enthält. Denn die Einer, Zehner, Hunderte ꝛc. des Multiplicandus werden so oft genommen, als die Einer, Zehner, Hunderte ꝛc. des Multiplicators anzeigen. Z. B. es soll die Zahl 8426 mit 234 multiplicirt, d. h., 234 mal genommen werden, so stehet das Exempel also:

8426

8426 Multiplicandus,
234 Multiplicator.

33704 }
25278 } Einzelne Producte.
16852 }

1971684 Product oder Factum.

Zusatz

§. 32. Was mit Eins multipliciret wird, bleibt unverändert, oder eins multipliciret nicht, und was mit Null multipliciret wird, ist Nichts, oder wird Null.

Hat also der Multiplicator eine Eins, so wird der Multiplicandus unverändert herunter gesetzt.

Hat aber der Multiplicator in der Mitte Nullen, so wird das Product davon übergangen, das Product der nächst folgenden Ziffer aber muß um so viele Stellen weiter zur linken eingerückt werden, als Nullen im Multiplicator auf einander folgen, damit die Ziffern nicht ihren Werth verlieren.

Befinden sich aber am Ende, bei einem oder auch bei beiden Factoren, Nullen, so nimmt man während der Multiplication keine Rücksicht auf sie, weil man sonst einige Zeilen mit Nullen anfüllen mußte, welche doch in der Addition nichts ändern.

Nur müssen die Producte an ihre gehörige Stelle gesetzt und an das Product rechter Hand so viele Nullen angehängt werden, als der eine Factor, oder auch beide zusammen, enthalten. Z. B.

a) 6432
124

25728
12864
6432

Prod. = 797568

b) 24368
4002

48736
97472

Prd. = 97520736

c) 34200
8 00

Prd. = 27360000

Anmerkung.

Es ist willkührlich, welchen Factor man als den Multiplicator oder Multiplicandus ansehen will, denn man wird allezeit einerlei Product erhalten; jedoch nimmt man mehrentheils die kleinere Zahl zum Multiplicator an, um nicht so viele einzelne Producte zu bekommen. Wenn mehrere Factoren mit einander multipliciret werden sollen, so ist es einerlei, in welcher Ordnung sie auf einander folgen, weil sie auf jede Art einerlei Product geben. Z. B.

$3 \times 2 \times 4 = 24$ und $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Grund-

Grundsätze.

§. 33. 1) Gleiches mit Gleichem multipliciret giebt gleiche Producte. Z. B.

$$8 = 4 \times 2$$
$$\text{und } 6 = 3 \times 2$$

$$\text{so ist} \begin{cases} 8 \times 6 = 4 \times 2 \times 3 \times 2 \\ 48 = 48 \end{cases}$$

2) Das Größere und das Kleinere durch Gleiches multipliciret, giebt, im ersten Falle, ein größeres, im zweiten aber ein kleineres Product. Z. B.

$$8 > 6$$
$$4 = 4$$

$$8 \times 4 > 6 \times 4$$
$$32 > 24$$

Beispiele zur Uebung.

I. Nach Bode legt die Erdkugel, in ihrer jährlichen Bahn um die Sonne, in einer Stunde 14700 deutsche Meilen zurück; wie groß ist also die Bahn, die sie in einem Jahre vollendet, das Jahr zu 365 Tagen und 6 Stunden gerechnet? 128,860200 Meilen.

II. Bei einer Recrutirung der Armee soll eine kleine Stadt 6 Mann, und ein Dorf 2 Mann liefern. Nun sind 76 kleine Städte und 215 Dörfer; wie stark wird diese Recrutirung seyn? 886 Mann.

III. Der Schall gehet mit einer Geschwindigkeit von 1078 Fuß in einer Secunde. Wie weit steht man von einer losgebrannten Kanone, wenn man, zwischen dem Erblicken des Pulverblitzes und dem Hören des Knalls, 2 — 3 — 4 — 5 — 6 Secunden zählt? 2156; — 3234; — 4312; — 5390; — 6468 Fuß.

IV. We=

IV. Weniger Pulsschläge als 23 in der Minute, versichert Haller, nie bei einem Menschen erfahren zu haben. Da man nun im Durchschnitte 75 Pulsschlage bei einem gesunden Menschen (in einem Alter von 25 Jahren) in der Minute annehmen kann; 1) wie viel Pulsschläge hatte jener — und 2) wie viel hat ein gesunder Mensch mehr, als jener a) in einer Stunde? — b) in einem Tage? — und c) in einem Jahre? 1) a) 1380, b) 33120 und c) 12088800 Pulsschläge, und 2) a) 3120, b) 74880 und c) 27331200 Pulsschläge.

IV. Division.

Erklärung.

§. 34. Die Division ist nach §. 6. nichts als eine abgekürzte Subtraction, und lehret: eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft eine von zwei gegebenen Zahlen in der andern enthalten sey. Die Zahl, welche dividirt werden soll, heißt: der Dividendus, und die, womit man dividirt: der Divisor; diejenige aber, welche durch ihre Einheiten anzeigt, wieviel mal der Divisor im Dividendus enthalten ist: der Quotient. Das Zeichen, durch welches man die Division anzeigen kann, sind zwei übereinander stehende Puncte (:), welche zwischen die beiden zu dividirenden Zahlen gesetzt werden, oder gewöhnlicher, ein Strich, über welchen der Dividendus und unter welchen der Divisor zu stehen kommt. Beide Zeichen heißen: dividirt.

Z. B. 12 : 4 oder $\frac{12}{4}$. Sind der Dividendus oder Divisor mit + oder — verbundene Zahlen, so werden sie in eine Parenthese gesetzt. Z. B.

$(8 + 4 + 6) : (5 + 5 - 1)$ ꝛc.

Auf-

Aufgabe.

§. 35. Zahlen zu dividiren.

Auflösung.

1) Wenn der Divisor aus einer einziffrigen Zahl bestehet.

Man suchet durch oben erwähntes Einmaleins eine Zahl, die, durch den Divisor multipliciret, ein solches Produkt giebt, welches der höchsten zu dividirenden Ziffer im Dividendus entweder gleich ist, oder doch so nahe kommen muß, daß, nach der Subtraction dieses Productes vom Dividendus, der Rest so klein ist, daß der Divisor kein ganzes Mal darin enthalten ist; dieses Product subtrahirt man vom Dividendus, rückt die nächste Ziffer im Dividendus herunter, und setzt diese Operation auf gleiche Art fort. Nach Beendigung derselben zeigt der Quotient an, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist. Z. B. Es soll die Zahl 9539 durch 4 dividiret werden, so stehet das Exempel also:

Dividendus	9539	2000	Partialquotienten aus den verschiedenen Stellen des Dividendus.
Divisor =	4...		
Product =	8...		
Rest =	15..	300	
Divisor =	4...		
Product =	12..		
Rest =	33.	80	
Divisor =	4.		
Product =	32.		
Rest =	19		
Divisor =	4	4	
Product =	16	2384	Quotient,
Rest	3	4	
		9536	
		3	Rest, darzu addiret.
		9539	Product des Quotienten × mit dem Divisor = dem Dividendus.

2) Bestehet der Divisor aus einer mehrziffrigen Zahl, so suchet man, wie viel die erste Ziffer des Divisors in der ersten, oder, wenn diese kleiner als jene wäre, in den beiden

erſten

ersten Ziffern des Dividendus enthalten ist; wobei man sich in Acht nehmen muß, keine Zahl zum Quotienten zu nehmen, welche ein größeres Product als der dividirte Theil ist, hervorbringt. Z. B. 843 | 73842 | 87 Quotient,

```
        843 | 73842 | 87 Quotient,
              6744
              ----
              6402
              5901
              ----
       Rest:   501
```

Hier stehet man, daß, obgleich acht in 73 9mal enthalten ist, doch der Divisor in dem Dividendus 7384 nicht 9mal, sondern nur 8mal enthalten ist.

Man kann sich hier dadurch helfen, daß man in Gedanken jede Stelle des Divisors von der rechten nach der linken Hand multiplicirt, und stehet, ob man die Producte von der nämlichen Stelle des Dividendus abziehen kann.

Anmerkung.

Ist das Product aus dem gefundenen Quotienten und dem Divisor größer, als die Zahl im Dividendus, von welcher abgezogen werden soll; so beweist dieses, daß der Quotient zu groß angenommen worden. Ist im Gegentheil, nach geschehener Subtraction, der Divisor noch im Reste enthalten, so ist der Quotient zu klein angenommen worden.

1. Zusatz.

§. 36. Sind die letzten Ziffern im Divisor Nullen, so kann man sie gleich unter die letzten Ziffern des Dividendus setzen, oder gleich so viel Stellen abschneiden, als Nullen vorhanden sind, weil selbige bei der Multiplication und Subtraction den Dividendus nicht verändern; man muß aber alsdann die letztern Ziffern des Dividendus, unter welchem diese Nullen stehen, zum Reste herunter ziehen. Z. B.

```
300 | 43684 | 145 Quotient,
      3  00
      -----
      13
      12
      -----
       16
       15
      -----
       184 Rest.
```

2. Zusatz.

§. 37. Hat der Divisor und Dividendus am Ende gleich viele Nullen, so können sie in beiden gänzlich weggelassen werden. Hat aber der Dividendus mehr Nullen, als der Divisor, so werden im erstern nur so viel weggeschnitten, als in dem zweiten befindlich sind. Z. B.

```
23000 | 772000 | 33     Oder:  27000 | 380000 | 14
         69 000                         27 000
         ------                         ------
         82                             110
         69                             108
         ------                         ------
         13 Rest.                         2 Rest.
```

3. Zusatz.

§. 38. Hat der Divisor 1 und übrigens lauter Nullen, so ist die Division leicht, denn man darf nur von dem Dividendus so viel Ziffern, als Nullen sind, abschneiden, welche den Rest ausmachen. Die zur linken übrig gebliebenen Ziffern sind der Quotient. Z. B.

```
1000 | 786543 | 786 Quotient.
          000
```

4. Zusatz.

§. 39. Ist nach der Subtraction eines einzelnen Productes der Rest, nebst der heruntergesetzten Ziffer, kleiner, als der Divisor; so kann derselbe darin nicht enthalten seyn, und in diesem Falle muß in dem Quotienten eine Null gesetzt werden. Weil nun aber hier kein Produkt, und folglich kein Rest, Statt finden kann; so bleibt die Zahl stehen, und die folgende Ziffer des Dividendus wird dazu gesetzt, und in der Division fortgefahren. Z. B.

```
42 | 4346 | 103
   | 42..
   ------
     146
     126
   ------
      20 Rest.
```

Anmerkung.

Man kann sich die Division noch auf eine andere Art vorstellen, die in manchen Fällen, besonders, wenn eine kleinere

Zahl

Zahl durch eine größere dividiret werden soll, ihren Nutzen hat. Man nehme an, daß 30 durch 6 dividiret werden soll, so ist der Quotient 5, und folglich $30 = 5 \times 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$.

Hieraus siehet man, daß man den Quotienten 5 auch finden könnte, wenn man den Dividendus 30 in 6 gleiche Theile zergliederte, und einen solchen Theil nähme.

Man kann also auch sagen: Dividiren heißt, eine von zwei gegebenen Zahlen in so viel gleiche Theile theilen, als die andere Einheiten hat, und einen solchen Theil wegnehmen.

Grundsätze.

§. 40. 1) Gleiches durch Gleiches dividiret, giebt gleiche Quotienten. Z. B.

$$24 = 4 \times 6$$
$$2 = 2$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{24}{2} = \frac{4 \times 6}{2} \\ 12 = 12 \end{array} \right\}$$

2) Das Größere und das Kleinere hingegen durch Gleiches dividiret, giebt, im ersten Falle, einen größern, im zweiten aber einen kleinern Quotienten. Z. B.

$$24 > 12$$
$$\text{und } 4 = 4$$
$$\text{so ist} \left\{ \begin{array}{c} \frac{24}{4} > \frac{12}{4} \\ 6 > 3 \end{array} \right\}$$

Beispiele zur Uebung.

I. Zu Recrutirung einer Armee mußten 76 Städte 456 Mann, und 215 Dörfer 430 Rekruten stellen; wie viel hat nun jede Stadt oder jedes Dorf stellen müssen, und wieviel sind Recruten überhaupt gewesen? 6 Mann, so jede Stadt, und 2 Mann, so jedes Dorf hat stellen müssen.

II. Ein englischer Wettrenner macht in der Zeit von einer Secunde 14 Schritte, oder vielmehr

Sprünge, womit er 84 Fuß zurücklegt. Wie weit ist also ein Sprung eines solchen Pferdes? Sechs Fuß.

III. Gesetzt, man stünde von einer Kanone 14014 Fuß entfernt — wie viel Zeit würde der Knall derselben, wenn sie losgebrannt würde, brauchen, um gehört zu werden, da der Schall in 1 Secunde 1078 Fuß zurücklegt? 13 Secunden.

IV. Das Faulthier ist so langsam, daß es in einem ganzen Tage kaum 25 Ellen zurücklegt; wie viel Tage würde es auf einer Meile, zu 11821 Ellen gerechnet, zubringen, welche ein englischer Wettrenner in 13 Minuten zurücklegt? Ueber 472 Tage.

Proben über die Multiplication und Division.

§. 41. Man siehet aus den bisherigen Erklärungen, daß die Division eigentlich die Zerlegung eines Products in seine Factoren ist, davon der Dividendus das Product, der Divisor und Quotient aber die beiden Factoren sind. Multipliciret man also den Quotienten mit dem Divisor, so muß der Dividendus zum Producte herauskommen.

Die Division und Multiplication heben sich also auch gegen einander auf, und dienen sich gegenseitig zur Probe.

Probe der Multiplication.

§. 42. Diese kann auch durch die Division geschehen; wenn man nämlich mit dem einen Factor in das Product dividiret, so muß der Quotient der andere Factor sein. Z. B.

```
        64
         4
  4)--------
       256 | 64
       24
     -------
        16
        16
     -------
        ..
```

Probe

Probe der Division.

§. 43. Hier muß der Quotient, multiplicirt mit dem Divisor, dazu den etwa gefundenen Rest addirt, gleich dem Dividendus seyn. Z. E.

6) 273	45	
24	6	
33	270	
30	3	add.
Rest 3	273.	

V. Primzahlen.

Erklärungen.

§. 44. Wenn eine Größe genau und ohne Rest sich durch eine andere dividiren läßt, so wird die erste ein Vielfaches der zweiten, und diese ein aliquoter (ausmessender) Theil, auch das Maas von der ersten genannt. Z. B. 8 ist ein Vielfaches von 4 und auch von 2, und also sind 4 und 2 aliquote Theile von 8. Gehet eine Zahl in mehreren verschiedenen ganzen Zahlen auf, so heißt sie das gemeinschaftliche oder das gemeine Maas aller dieser Zahlen. So ist z. B. die Zahl 4 das gemeine Maas für die Zahlen 8, 16, 20, 24 ꝛc. Die größere Zahl, worin eine kleinere aufgehet, ist aber ein Product dieser kleinern Zahl mit dem Quotienten, und man drückt sich gewöhnlich aus: das Product sei aus den Factoren zusammengesetzt.

Das größte gemeine Maas mehrerer Zahlen ist, wenn sich kein größeres angeben läßt, welches in jeder dieser Zahlen aufgehet.

Also ist 12 das größte gemeine Maas für 12 und 36, und 2 für 8 und 66.

§. 45. Jede Zahl, die keinen andern genauen Divisor als sich selbst, oder die Einheit, hat, folglich aus

aus keinen Factoren zusammengesetzt ist, heißt: eine einfache oder Primzahl, (absolute Primzahl); z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, ꝛc. Haben aber Zahlen, die man mit einander vergleicht, keinen andern gemeinschaftlichen Divisor, als die Einheit, so werden sie Primzahlen unter sich (relative Primzahlen) genannt. Z. B. 15 und 4 sind Primzahlen unter sich.

§. 46. Eine Zahl, die in einem von den Factoren eines Productes aufgehet, gehet im Producte selbst auf; denn sie ist alsdann ebenfalls ein Factor des Productes. Z. B es sei 6 die Zahl, 42 und 4 die Factoren eines Products, und es ist $42 : 6 = 7$, also $42 \times 4 = 168 : 6 = 28$ und $4 \times 6 \times 7 = 42 \times 4$.

§. 47. Eine Zahl, die in zwei andern aufgeht, muß auch in der Summe dieser beiden Zahlen aufgehen. Z. B. Es sei 6 diese Zahl, 18 und 12 die beiden andern; nuu ist aber 6 in 18 und 12 ohne Rest enthalten; folglich muß auch 6 in $12 + 18 = 30$ ohne Rest enthalten sein.

§. 48. Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der größern aufgehet, so ist sie das größte gemeine Maas beider Zahlen. So ist 12 das größte gemeine Maas von 12 und 48.

§. 49. Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der größern nicht aufgehet, aber wohl der Rest in der kleinern; so ist der Rest selbst das größte gemeine Maas. Es sei z. B. 52 und 12. Nun giebt $52 : 12$ zum Reste 4 und $12 : 4$ giebt einen Quotienten ohne Rest; folglich ist 4 das größte gemeine Maas von 52 und 12.

§. 50. Wenn man von zwei gegebenen Zahlen die größere durch die kleinere dividirt, und einen Rest erhält, den vorhergehenden Divisor durch diesen Rest von neuem dividiret ꝛc., bis man einen Rest erhält, der

in

in dem nächst vorhergehenden Divisor aufgehet; so ist dieser Rest das größte gemeine Maas der beiden Zahlen.

Es sei z. B. 323 und 228 gegeben;

```
so ist  228 | 323 | 1      95 | 228 | 2
              228                190
              ---                ---
               95                 38

   38) 95 | 2           19 | 38 | 2
       76                    38
       --                    --
       19                     0
```

folglich ist 19 das größte gemeine Maas für die Zahlen 19 und 38; für 38 und 95; ferner für 95 und 228, und folglich auch für 228 und 323.

1. Zusatz.

§. 51. Auf diese Art läßt sich allezeit das größte gemeine Maas zweier Zahlen finden. Bliebe 1 zum Reste, so sind die gegebenen Zahlen **Primzahlen unter sich** nach §. 45.

2 Zusatz.

§. 52. Will man alle Theile (Divisoren) einer Zahl wissen, so dividiret man dieselbe nach und nach durch alle Primzahlen, so lange, als die Division möglich ist. Z. B.

Dividendus	84	1 Divisoren.
und	42	2
Quotienten	21	2
	7	3
	1	7

Die Zahl 84 ist aber noch durch alle Producte der Primdivisoren, je zwei und zwei, drei und drei, ꝛc. theilbar, wie man aus folgendem Schema ersehen kann:

84	1
42	2
21	2, 4,
7	3, 6, 12,
1	7, 14, 28, 21, 42, 84.

Viertes Kapitel.

Von den Brüchen überhaupt.

Erklärungen.

§. 53. Es kann der Fall eintreten, daß eine kleinere Zahl, z. B. 4, durch 8 dividiret werden soll, wo aber, wie man siehet, die Division nicht wirklich verrichtet werden kann. Diese Division zeigt man dadurch an, daß man unter die 4 einen Strich ziehet, und den Divisor 8 darunter setzt. Z. B. $\frac{4}{8}$. Hier soll also der 8te Theil aus 4 gefunden werden.

Dieser 8te Theil kann aber, wie man leicht siehet, keine ganze Zahl sein, indem 8 in 4 kein ganzes mal, sondern nur $\frac{4}{8}$ mal, enthalten ist.

Diese Art Zahlen heißen: Bruchzahlen oder Brüche.

§. 54. Sollen wir 3 Aepfel unter 4 Personen theilen, so siehet man, daß auf eine Person kein ganzer Apfel, sondern nur $\frac{3}{4}$ vom Apfel kommen kann. Nämlich man müßte jeden Apfel in 4 gleiche Theile theilen, und jeder Person 3 solche Theile geben.

Wir können also auch sagen, daß ein Bruch entstehet, wenn man ein Ganzes in gewisse gleiche Theile theilet, und einen oder etliche Theile davon nimmt, und können daher Brüche auf zweierlei Art betrachten.

1) Als eine Zahl, welche durch eine andere dividiret werden soll. Z. B. 4 dividirt durch 8. (§. 34.)
2) Als einen oder etliche Theile vom Ganzen, z. B. $\frac{3}{4}$ Thaler. Hier ist das Ganze, nämlich hier der Thaler, in 4 Theile getheilet, und 3 dieser Theile davon weggenommen; daher der Ausdruck: drei Viertheile oder Viertel.

§. 55. Man braucht also, um Brüche auszu-

drücken, zwei Zahlen, welche aber durch einen Strich abgesondert sind. Diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile das Ganze eingetheilt ist, heißt: der Nenner, und kommt unter den Strich; über denselben aber kommt die Zahl, welche anzeigt, wie viel solcher Theile genommen werden sollen, und diese heißt der Zähler. Z. B. $\frac{3}{4}$. Hier zeigt der Nenner 4 an, daß das Ganze in 4 Theile getheilet ist; der Zähler 3 aber zeigt an, daß 3 solcher Theile weggenommen worden. Diese Art Brüche heißen: ächte oder eigentliche Brüche.

§. 56. Je näher nun der Zähler dem Nenner kommt, desto größer muß der Bruch werden, und desto näher wird derselbe dem Ganzen kommen; je kleiner aber der Zähler in Absicht des Nenners ist, desto kleiner muß auch der Bruch sein. So sind $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$ größere Brüche, als $\frac{1}{4}$, und $\frac{2}{4}$, als $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ ꝛc.

Nimmt man endlich so viel Theile, als das Ganze hat, weg, so muß der Zähler eben so groß als der Nenner, und der Bruch die Einheit oder das Ganze selbst sein. Z. B. $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{48}{48}$, $\frac{64}{64}$ ꝛc.

Ist hingegen der Zähler größer als der Nenner, so muß noch mehr als ein Ganzes in dem Bruche enthalten sein. Z. B. $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{4}{3}$ ꝛc. Diese beiden Arten heißen unächte oder uneigentliche Brüche.

Stehen Ganze und Brüche beisammen, so heißen sie: mit Ganzen vermischte Brüche. Z. E. $4\frac{1}{2}$, $6\frac{5}{8}$ ꝛc.

Zusatz.

§. 57. Aus den vorhergehenden Erklärungen §. 53. u. 54. erhellet, daß man einen jeden Bruch als den Quotienten ansehen kann, den man findet, wenn eine Zahl durch eine andere dividiret werden soll, so, daß der Zähler den Dividendus, und der Nenner den Divisor vorstellet. Z. B.

$\frac{1}{3} = 1 : 3$; $\frac{16}{4} = 16 : 4$;

Umge-

umgekehrt, ist also jeder Quotient einem Bruche gleich, dessen Zähler der Dividendus, und dessen Nenner der Divisor ist; daher ist die Bezeichnung der Brüche und der Division einerlei.

2. Zusatz.

§. 58. Vergleicht man dieses mit den Fällen der Division, wo am Ende ein Rest übrig blieb, so siehet man leicht ein, daß man zwar den Quotienten in ganzen Zahlen genau finden kann, aber demselben noch ein Bruch angehängt werden muß, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. So ist:

$$67 : 9 = 7 + \frac{4}{9} \text{ oder } \frac{67}{9}.$$

Aufgabe.

§. 59. Die Ganzen in einem unächten Bruche zu finden.

Auflösung.

Da in einem unächten Bruche das Ganze ein- oder etlichemal enthalten ist, so wird solches gefunden, wenn man den Zähler durch den Nenner dividiret. Bleibt etwas übrig, so ist es ein eigentlicher Bruch; im Gegentheil sind lauter Ganze im Bruche enthalten. Z. B.

$\frac{24}{4} = 6$. Ferner: $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$. $\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$ ꝛc.

Zusatz.

§. 60. Da, nach §. 54., ein jeder Bruch als eine Division angesehen werden kann, so kann auch jede Zahl in einen Bruch verwandelt werden, wenn man ihr zum Nenner 1 giebt. Z. B. $\frac{8}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$ ꝛc.

Aufgabe.

§. 61. Ganze Zahlen sowohl, als mit Ganzen vermischte Brüche, in unächte Brüche zu verwandeln.

Auflösung.

Dieses ist die umgekehrte Operation von voriger Aufgabe, denn man darf nur die ganze Zahl mit dem gegebenen Nenner multipliciren. Z. B. die Zahl 6 sollte auf einen Bruch gesetzt werden, der zum Nenner 4 habe, so heißt der unäch-

unächte Bruch $\frac{24}{4}$. Denn ein Ganzes ist $\frac{4}{4}$; mithin 6mal $\frac{4}{4}$ sind $\frac{24}{4}$. Befindet sich bei der ganzen Zahl noch ein Bruch, so addirt man ihn dazu. Z. B. $6\frac{3}{4} = \frac{27}{4}$. Ferner $8\frac{3}{7} = \frac{59}{7}$.

Anmerkung.

Dieses Verfahren, einen vermischten Bruch auf einen unächten zu setzen, heißt auch: einen Bruch einrichten.

Erklärungen.

§. 62. Will man die Größe oder den Werth eines Bruches beurtheilen; so muß man sowohl auf die Menge der Theile, folglich auf die Größe des Zählers, als auf die Größe der Theile, in welche das Ganze getheilet ist, das ist, auf den Nenner sehen.

§. 63. Brüche können aber eben so, wie die ganzen Zahlen, vermehrt und vermindert werden, nur daß es hier auf eine zweifache Art, und zwar sowohl durch die Multiplication als Division, geschehen kann.

1) Durch die Multiplication geschiehet die Vermehrung, wenn die Menge der Theile vermehret wird, ohne ihre Größe zu verändern; nämlich, wenn der Zähler mit einer Zahl multipliciret wird, und der Nenner unverändert bleibt. Z. B. $\frac{3}{4} \times 8$ giebt $\frac{24}{4}$. Der Bruch ist hier also 8mal größer gemacht.

2) Durch die Multiplication geschiehet die Verminderung, wenn die Anzahl der Theile bleibt, die Theile aber an und für sich kleiner werden, das heißt, wenn wir den Nenner mit einer ganzen Zahl multipliciren, den Zähler aber unverändert lassen. Z. B. $\frac{3}{4} \times 8$ giebt $\frac{3}{32}$, und einen 8mal kleinern Bruch.

Zusatz.

§. 64. Hieraus folgt, daß, wenn man Zähler und Nenner eines Bruches mit einerlei Zahl multipliciret, der Bruch unverändert bleiben muß.

Z. B.

Z. B. $\frac{3}{4} \times 8 = \frac{24}{32}$. Denn, durch die Multiplication des Zählers durch 8, wird der Bruch 8mal größer; hingegen, durch die Multiplication des Nenners durch 8 werden die Theile, und folglich der Bruch, 8mal kleiner; folglich müssen diese beiden Veränderungen einander aufheben, und den Werth des Bruches unverändert lassen.

§. 65. 1) Durch die Division geschiehet die Verminderung, wenn weniger Theile genommen werden, und solche in gleicher Größe verbleiben; folglich, wenn der Zähler dividiret wird, und der Nenner unverändert bleibt. Z. B. $\frac{24}{32}$: 8 giebt $\frac{3}{32}$, also einen 8mal kleinern Bruch.

2) Die Vermehrung durch die Division hingegen geschiehet, wenn die Anzahl der Theile bleibt, die Theile hingegen größer werden, das ist, wenn der Nenner dividiret wird, und der Zähler unverändert bleibt. Z. B. $\frac{24}{32}$: 8 giebt $\frac{24}{4}$ einen 8mal größern Bruch.

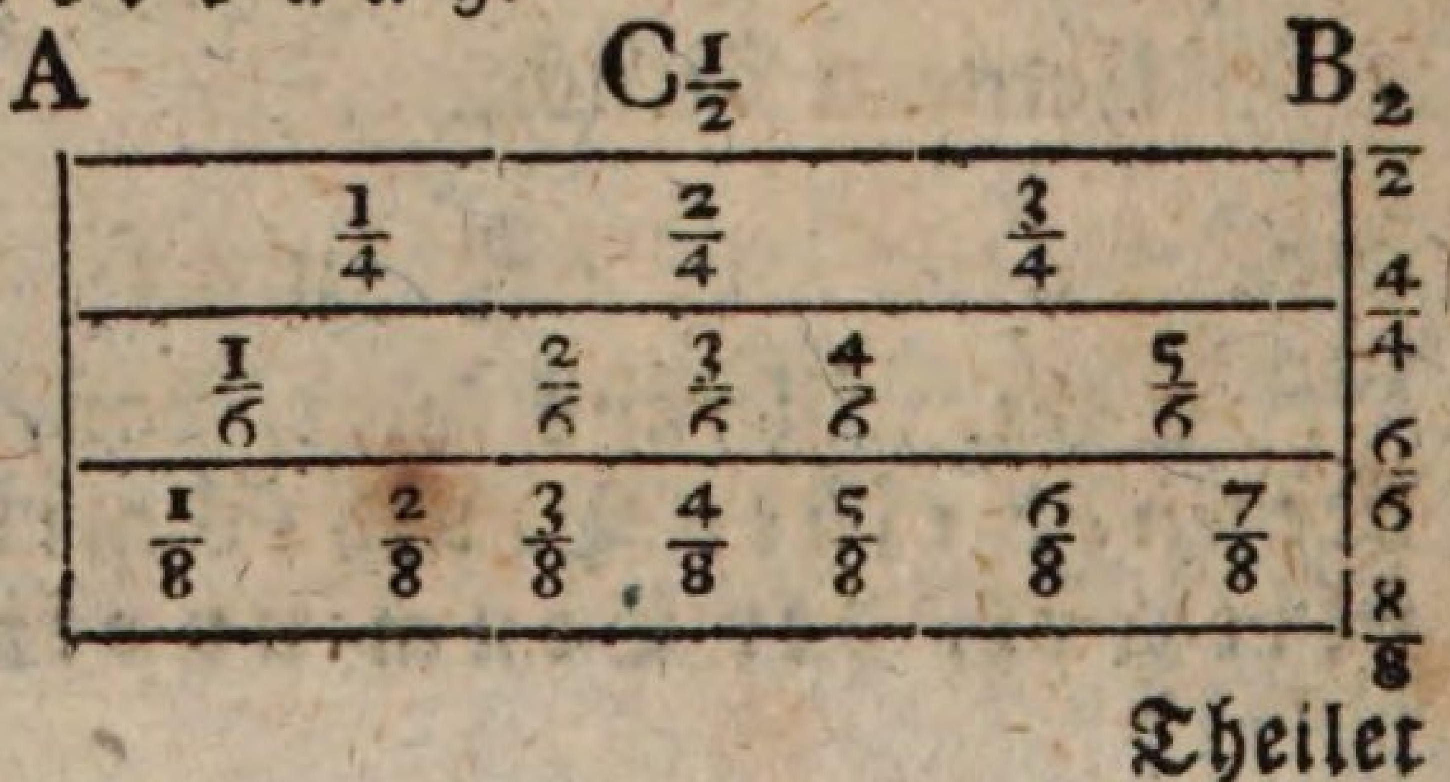
1. Zusatz.

§. 66. Hieraus folgt ferner, daß, wenn man Zähler und Nenner eines Bruches mit einerlei Zahl dividiret, der Werth des Bruches unverändert bleiben muß. Denn, durch die Division des Zählers mit 8, wurde der Bruch 8mal kleiner, und durch die Division des Nenners, 8mal größer; folglich heben sich die beiden Veränderungen auf, und der Bruch bleibt unverändert. Z. B. $\frac{24}{32} : 8 = \frac{}{4}$.

Man siehet hieraus, daß Brüche einerlei Größe haben können, ob sie gleich mit verschiedenen Ziffern geschrieben sind; denn, wenn die Zähler in ihren Nennern gleich vielmal enthalten sind; so müssen auch die Werthe, und folglich die Brüche, einander gleich sein.

Anmerkung.

Um sich dieses deutlich zu machen, so sehe man das Ganze als eine Linie AB an, welche in C in zwei gleiche Theile getheilet ist. So ist AC = CB = $\frac{1}{2}$.



Theilet man die Linie AB in 4 gleiche Theile, als in noch einmal so viel gleiche Theile, so ist ein solches 4tel auch nur halb so groß, als $\frac{1}{2}$. Nimmt man nun noch einmal so viel Theile, so hat man ein eben so großes Stück, als vorher; also ist $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Theilet man das Ganze AB in 6 gleiche Theile, mithin in 3 mal mehr Theile, als im Anfange; so ist ein solches 6tel auch 3 mal kleiner, als $\frac{1}{2}$. Nimmt man also auch 3 mal so viel solche Theile, mithin $\frac{3}{6}$; so ist dieses Stück eben so groß; folglich: $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Und auf diese Art ist auch $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 2c.

2. Zusatz.

§. 67. Aus dem Vorhergehenden siehet man, daß die Multiplication und Division der Zähler eben die Wirkung, wie bei den ganzen Zahlen, hat, das ist, die Multiplication des Zählers vermehrt, die Division des Zählers aber vermindert den Werth der Brüche.

Die Multiplication und Division der Nenner hingegen hat eine dem vorigen entgegengesetzte Wirkung, das ist, die Multiplication vermindert, und die Division vermehrt den Werth der Brüche.

3. Zusatz.

§. 68. Aus diesen so eben angeführten Sätzen läßt sich nun auch sehr leicht einsehen, wie man es anfangen müsse, Brüche mit verschiedenen Nennern in andre gleichgeltende zu verwandeln, die einerlei Nenner haben, oder, aus einem Bruche einen andern von eben dem Werthe zu machen, dessen Zähler und Nenner aus kleinern Zahlen bestehen.

Die erste Operation nennet man: Brüche auf einerlei Benennung bringen und die zweite: Brüche aufheben.

Aufgabe.

§. 69. Zwei Brüche auf einerlei Benennung zu bringen.

Auflösung.

Sollen Brüche, z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$, auf einerlei Benennung gebracht werden; so multiplicire man nicht allein die beiden Nenner 4 und 7 durch einander, welches

Product man den Generalnenner heißt, sondern nun auch jeden Zähler mit dem Nenner des andern Bruches. Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7} = \frac{21}{28}$ und $\frac{20}{28}$.

Hier werden sowohl der Zähler als der Nenner des Bruches $\frac{3}{4}$ durch 7, und der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{5}{7}$ durch 4 multiplicirt; beide Brüche behalten also auch ihren Werth. (§. 64.)

1. Zusatz.

§. 70. Läßt sich der eine Nenner in den andern ohne Rest dividiren, so braucht nur ein Bruch verwandelt zu werden. Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{12}$.

Hier ist der Nenner 4 in dem Nenner 12 dreimal enthalten; man braucht also nur den Zähler und den Nenner des Bruches $\frac{3}{4}$ durch 3 zu multipliciren, so hat der gefundene Bruch $\frac{9}{12}$ gleichen Werth mit $\frac{3}{4}$ und einerlei Benennung mit $\frac{7}{12}$. (§. 64.)

2. Zusatz.

§. 71. Da es bisweilen zu wissen nöthig ist, welcher von zwei Brüchen größer oder kleiner sei; so kann man dieses sogleich erkennen, wenn man beide auf einerlei Benennung bringt. Z. B. $\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{3}$ sind gegeben; welcher von beiden ist der größere?

$\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{3} = \frac{15}{24}$ und $\frac{16}{24}$, folglich $\frac{16}{24} > \frac{15}{24}$, d. i. $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

3. Zusatz.

§. 72. Sind mehrere Brüche auf einerlei Benennung zu bringen; so muß man, nach vorigen Erklärungen, den Zähler sowohl, als den Nenner eines jeden Bruches, durch das Produkt aller übrigen multipliciren; so geben die ersten Producte die Zähler, und die zweiten die Nenner zu den neuen Brüchen, und da hier bei jedem Bruche der Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multipliciret wird, so muß jeder Bruch von gleichem Werthe verbleiben. Z. B. Folgende Brüche, als $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{8}$, sollen zu einerlei Benennung gebracht werden.

Hier giebt also $4 \times 3 \times 2 \times 8 = 192$ den Generalnenner. Multipliciret man nun den Zähler 3 mit den Nennern 3, 2 und 8, den Zähler 2, mit den Nennern 4, 2, und 8 rc. so erhält man folgende Brüche: $\frac{144}{192}$ $\frac{128}{192}$ $\frac{96}{192}$ $\frac{120}{192}$.

4. Zu=

4. Zusatz.

§. 73. Bei dieser Operation siehet man, daß der Generalnenner durch das Product der übrigen Nenner entstanden ist; folglich muß man bei jedem Bruche das Product der übrigen Nenner erhalten, wenn man mit jedem Nenner in den Generalnenner dividirt; dieses giebt uns zu folgender Abkürzung Anleitung. Z. B. Es sind obige Brüche zu einerlei Benennung zu bringen, so ist:

192

$\frac{3}{4}$	48	$\frac{144}{192}$
$\frac{2}{3}$	64	$\frac{128}{192}$
$\frac{1}{2}$	96	$\frac{96}{192}$
$\frac{5}{8}$	24	$\frac{120}{192}$

Hier dividiret man mit jedem Nenner in den Generalnenner, so erhält man das Product der übrigen Nenner; dieses, mit jedem Zähler multiplicirt, giebt also den neuen Zähler; denn auch hier wird Zähler und Nenner durch einerlei Zahl multipliciret, und dadurch der Werth des Bruches nicht verändert. (§. 64.)

5. Zusatz.

§. 74. Findet sich indessen, daß die Nenner der gegebenen Brüche entweder einen gemeinschaftlichen Divisor haben, oder daß einer von ihnen ein Vielfaches des andern ist; so kann die vorige Regel dahin verändert werden, daß die gleiche Benennung der Brüche weit einfacher ausfallen muß.

Um nun aber die möglichst kleinste Zahl, die alle Nenner genau enthält, zum gemeinschaftlichen Nenner zu erhalten, setze man die Nenner der gegebenen Brüche allein in eine Reihe, und untersuche, ob sich nicht einige von denselben durch die §. 45. erwähnten Primzahlen dividiren lassen. Die Quotienten, nebst den undividirten Nennern, werden in eine zweite Reihe gesetzt, und nun untersucht man wieder, ob sich in derselben nicht einige Zahlen wieder auf obige Art dividiren lassen, und so setzt man die Division reihenweise fort, bis keine weitere Division Statt finden kann. Nun multiplicire man das Product der in der letztern Reihe unzudividirenden Zahlen mit dem Producte von allen dazu angewandten Divisoren; so giebt das Product den möglichst kleinsten gemeinschaftlichen Nenner der gegebenen Brüche. Z. B. Es sollen die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{16}$ zu einerlei Benennung gebracht werden, so ist:

2)	3,	4,	6,	7,	12,	16,
2)	3,	2,	3,	7,	6,	8,
2)	3,	1,	3,	7,	3,	4,
3)	3,	1,	3,	7,	3,	2,
	1,	1,	1,	7,	1,	2,

und folglich $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2 = 336$ der kleinste gemeinschaftliche Nenner, das übrige ist wie vorhin. Z. B.

	336	
$\frac{2}{3}$	112	$\frac{224}{336}$
$\frac{3}{4}$	84	$\frac{252}{336}$
$\frac{5}{6}$	56	$\frac{280}{336}$
$\frac{3}{7}$	48	$\frac{144}{336}$
$\frac{7}{12}$	28	$\frac{196}{336}$
$\frac{5}{16}$	21	$\frac{105}{336}$

Die Zahl, welche, diesen Regeln gemäß, für den gemeinschaftlichen Nenner, angenommen wird, ist wieder ein Product, worin alle Factoren eines jeden speciellen Nenners, aber auch nicht mehr Factoren, vorkommen; demnach geht jeder Specialnenner darin auf, nach §. 46., und es giebt keine kleinere Zahl, worin jeder Specialnenner aufgehen könnte.

Aufgabe.

§. 75. Brüche in andre von gleichem Werthe zu verwandeln.

Auflösung.

Soll ein Bruch, z. B. $\frac{2}{3}$, in einen andern verwandelt werden, wozu der Nenner 12 gegeben ist, so betrachte man, daß, da der gegebene Nenner 3 in dem zu verwandelnden 12 gerade 4 mal enthalten, folglich $3 \times 4 = 12$ ist, man nur den Zähler des Bruches $\frac{2}{3}$ mit 4 multipliciren darf, um den gleichgeltenden Bruch $\frac{8}{12}$ zu erhalten.

Anmerkung.

Diese Verwandlung findet nicht allgemein, sondern nur dann statt, wenn der gegebene Nenner in dem zu verwandelnden aufgehet.

§. 76. Brüche aufzuheben, oder, mit wenigern Zahlen zu schreiben.

Auflö-

Auflösung.

Da es oft nöthig ist, einen Bruch, ohne Nachtheil desselben, durch die möglichst kleinsten Zahlen auszudrücken, um den Werth desselben sogleich übersehen zu können; so geschiehet dieses, nach §. 66. also, daß man ein oder mehrere Primzahlen sucht, mit welchen sich der Zähler und Nenner ohne Rest dividiren läßt. Z. B.

$$\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{1}{c}{8} & \multicolumn{1}{c}{3} & \\ 48 & 6 & 2 \\ \hline 72 & 9 & 3. \end{array} \qquad \text{Ferner} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{1}{c}{9} & \\ 36 & 4 \\ \hline 45 & 5. \end{array}$$

Beide Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ sind mit $\frac{48}{72}$ und $\frac{36}{45}$ gleichgeltend. (§. 66.)

Ferner

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{9} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{3} & \\ 2835 & 315 & 45 & 9 & 3 \\ \hline 3780 & 420 & 60 & 12 & 4. \end{array}$$

1. Zusatz.

§. 77. Durch fleißige Uebung erhält man bald die Fertigkeit, die Zahlen zu finden, mit welchen sich der Bruch aufheben läßt.

Um sich aber diese Aufhebung zu erleichtern, dienen verschiedene Hülfsmittel.

Unter andern sind folgende zu bemerken:

1) Endigt sich der Zähler und Nenner mit Nullen, so können in beiden gleich viel Nullen weggestrichen werden. (§. 37.)

2) Endigt sich der Zähler und Nenner mit einer geraden Zahl oder mit einer Null, so kann auch der Bruch, durch eine gerade Zahl, und zwar allezeit durch 2, aufgehoben werden.

3) Endigt er sich mit einer ungeraden Zahl, so muß er auch durch ungerade Zahlen, besonders, wenn er sich mit 5 endigt, durch 5 aufgehoben werden.

4) Jede Zahl, deren Zahlzeichen, zusammen addirt, eine oder mehrere 9 geben, läßt sich durch 9 dividiren.

2. Zusatz.

§. 78. Da bei Brüchen, die aus vielen Zahlen bestehen, das Aufheben auf diese Art doch noch mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist; so ist es leichter, wenn man den Zähler sowohl als den Nenner durch das größte gemeine Maas (§. 48. 49. und 50.) dividiret. Z. B. Es sei der Bruch $\frac{533}{697}$ aufzuheben, so dividiret man den Nenner 697 durch den Zähler; gehet hier die Division auf, so läßt sich der Bruch durch den Zähler selbst aufheben, (§. 48.); bleibt aber ein Rest, so dividiret man den Divisor durch den Rest so lange, bis die Division aufgehet; der letzte Divisor ist dann das größte gemeine Maas des Zählers und Nenners. (§. 49. und 50.)

Gehet die Division niemals auf, so giebt es keine Zahl, die den Bruch aufhebet. Z. B.

533	697	1	164	533	3	41	164	4
	533			492			164	
	164			41			...	

Hier ist also 41 das größte gemeine Maas des Zählers und Nenners, oder, der größte gemeinschaftliche Divisor des Bruches, und 41

$\frac{533}{697} \Big| \frac{13}{17}$ der aufgehobene Bruch.

Fünftes Kapitel.

Von den 4 Rechnungsarten mit Brüchen.

I. Addition.

Aufgabe.

§. 79. Brüche zu addiren.

Auflösung.

1) Haben die Brüche einerlei Nenner, so addiret man sogleich die Zähler, indem gleichartige Zahlen zusammen addiret werden können. Z. B. $\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$; und $\frac{5}{12} + \frac{7}{12} = \frac{12}{12}$.

2) Haben die Brüche verschiedene Nenner, so bringt man sie vorher zu einerlei Benennung, (§. 72 — 74.) addiret die Zähler, und setzt unter die Summe den Generalnenner. Ist die Summe ein unächter Bruch, so

suche

suche man die Ganzen. (§. 59.) Z. B. Es soll $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{8}$ addiret werden, so ist:

8		
$\frac{3}{4}$	2	6
$\frac{5}{8}$	1	5

Summe $= \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$.

Zusatz.

§. 80. Sind Ganze und Brüche zu addiren, so addiret man erst die Brüche, und alsdann die Ganzen, nachdem man die bei den Brüchen herausgebrachten Ganzen dazu addiret hat. Z. B. Es sind folgende Zahlen zu addiren: $46\frac{1}{2}$, $48\frac{3}{5}$, $100\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$.

$$2)\underline{2,\ 5,\ 8,\ 4}$$
$$2)\underline{1,\ 5,\ 4,\ 2}$$
$$1,\ 5,\ 2,\ 1.$$

Folglich: $2 \times 2 \times 5 \times 2 = 40 =$ dem Generalnenner. (§. 74.)

(2) 40		
$46\frac{1}{2}$	20	20
$48\frac{3}{5}$	8	24
$100\frac{3}{8}$	5	15
-- $\frac{3}{4}$	10	30

Summe $196\frac{9}{40}$. $\frac{89}{40} = 2\frac{9}{40}$.

II. Subtraction.

Aufgabe.

§. 81. Einen kleinern Bruch von einem größern zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Haben die Brüche einerlei Nenner, so subtrahire man die Zähler, und setze unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner. Z. B.

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}.$$

2) Haben die Brüche verschiedene Nenner, so bringt man sie vorher zu einerlei Benennung, und verfähret, wie vorhin. Z. B. von $\frac{5}{8}$ soll $\frac{2}{5}$ abgezogen werden:

$$\begin{array}{r|r|r} & \multicolumn{2}{c}{40} \\ \text{so ist } \frac{5}{8} & 5 & 25 \\ \frac{2}{5} & 8 & 16 \\ \hline \text{Rest} & & \frac{9}{40} \end{array}$$

Zusatz.

§. 82. Sind Ganze bei den Brüchen, so werden erst die Brüche, und dann die Ganzen, subtrahirt. Z. B.

$$\begin{array}{r|r|r} & \multicolumn{2}{c}{10} \\ \text{von } 5\frac{1}{2} & 5 & 5 \\ \text{soll abgezogen werden } 2\frac{2}{5} & 2 & 4 \\ \hline \text{Rest } 3\frac{1}{10} & & 1. \end{array}$$

Ist der Bruch im Minuendus kleiner als im Subtrahendus, so nimmt man von den Ganzen des Minuendus eine Einheit, setzt solche auf einen unächten Bruch mit dem gemeinschaftlichen Nenner, addiret ihn zum Zähler des Bruches im Minuendus, und ziehet von der Summe des Zählers den Subtrahendus ab. Z. B.

$$\begin{array}{r|r|r} & \multicolumn{2}{c}{63} \\ & & 63 \\ \text{von } 16\frac{2}{9} & 7 & \frac{14}{77} \\ \text{soll abgezogen werden } 8\frac{6}{7} & 9 & 54 \\ \hline \text{Rest } 7\frac{23}{63} & & 23 \end{array}$$

Hier kann $\frac{54}{63}$ von $\frac{14}{63}$ nicht abgezogen werden; man muß also ein Ganzes $= \frac{63}{63}$ borgen; dazu $\frac{14}{63}$ addiret, giebt $\frac{77}{63}$, wovon man $\frac{54}{63}$ abziehen kann.

Anmerkung.

Die Addition und Subtraction dienen auch bei den Brüchen einander zur Probe.

III. Multiplication.

§. 83. Die Multiplication und Division mit Brüchen haben gemeiniglich für Anfänger einige Schwierigkeiten; allein, wenn man das, was im vorigen Abschnitte, bei der Vermehrung und Verminderung der Brüche, gesagt worden ist, richtig gefaßt

faßt hat; so werden diese beiden Rechnungsarten dadurch sehr erleichtert.

Es kommen aber bei der Multiplication verschiedene Fälle vor, nämlich: entweder beide Factoren sind Brüche, oder einer derselben ist eine ganze Zahl.

Aufgabe.

§. 84. Brüche durch Brüche zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Z. B. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Hier soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciret werden; das heißt so viel, man soll $\frac{3}{4}$ nicht ganz, sondern $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ nehmen.

Man soll also $\frac{3}{4}$ in 3 Theile theilen und 2 Theile davon nehmen; dieses geschiehet aber, (§. 63. Nr. 2.) wenn man den Nenner mit 3 multipliciret, wodurch man $\frac{3}{12}$ erhält; diesen Bruch nun 2 mal genommen, giebt $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ zum Producte. Hieraus siehet man, woher es kommt, daß das Product kleiner, als die Factoren selbst sind, und wo die oben gegebene allgemeine Regel ihren Grund hat.

1. Zusatz.

§. 85. Ist einer der Factoren eine ganze Zahl, z. B. es soll der Bruch $\frac{3}{4}$ durch die ganze Zahl 8 multipliciret werden; so heißt das: $\frac{3}{4}$ soll 8 mal genommen, oder 8 mal vermehrt werden; nun geschiehet aber die Vermehrung eines Bruches, (§. 63. Nr. 1.) wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciret. Z. B. $\frac{3}{4} \times 8 = \frac{24}{4} = 6$ das Product.

2. Zusatz.

§. 86. Soll eine ganze Zahl, z. B. 8 durch einen Bruch $\frac{3}{4}$ multipliciret werden; so muß das Product ebenfalls kleiner, nämlich $\frac{24}{4} = 6$ sein.

Denn, wenn $\frac{1}{4}$ von $8 = 2$ ist, so sind $\frac{3}{4} = 6$.

An-

Anmerkung.

Man siehet hieraus, daß an der Ordnung der Factoren nichts gelegen ist, und daß man in beiden Fällen einerlei Product erhält.

3. Zusatz.

§. 87. Soll man vermischte Zahlen multipliciren, so setzt man dieselben vorher auf unächte Brüche, und verfährt, wie vorhin. Z. B.

$3\frac{4}{5} \times 6\frac{2}{3} = \frac{19}{5} \times \frac{20}{3} = \frac{380}{15} = 25\frac{1}{3}$ das Product.

IV. Division.

Aufgaben.

§. 88. Brüche durch Brüche zu dividiren.

Auflösung.

Hier treten 2 Fälle ein; nämlich:

1) diese Brüche haben einerlei Nenner; oder:

2) sie haben verschiedene Nenner.

Wenn im ersten Falle $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{9}$ dividiret werden soll, so heißt das: man soll finden, wie oft $\frac{2}{9}$ in $\frac{8}{9}$ enthalten ist. Es ist aber $\frac{2}{9}$ in $\frac{8}{9}$ so oft enthalten, als der Zähler 2 des Divisors in dem Zähler 8 des Dividendus enthalten ist; z. B. hier 4 mal. Woraus die Regel folgt, daß, wenn 2 zu dividirende Brüche einerlei Nenner haben, man nur mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividendus dividiren darf, und, da zwei zu dividirende Zahlen allezeit einen Bruch formiren, wovon der Dividendus der Zähler und der Divisor der Nenner ist; (§. 57.) so setzet man aus den Zählern des Dividendus und Divisors einen Bruch zusammen, wovon der erste der Zähler, der letzte aber der Nenner ist. Z. B.

$\frac{8}{9} : \frac{2}{9} = \frac{8}{2} = 4$ und

$\frac{5}{12} : \frac{7}{12} = \frac{5}{7}$ der Quotient.

Haben, im zweiten Falle, die Brüche nicht einerlei Nenner, so müßte man dieselben erst zu einerlei Benennung bringen. Z. B. $\frac{3}{4}$ soll durch $\frac{2}{5}$ dividiret werden, so ist:

$\frac{15}{20} : \frac{8}{20} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ der Quotient.

Man erhält aber den nämlichen Quotienten, wenn man

man den Divisor $\frac{2}{5}$ umkehrt, und Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multipliciret. Z. B.

$\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ stehet nun

$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ wie vorhin.

Hieraus entsteht nun, bei der Division mit Brüchen, eine allgemeine Regel: den Divisor umzuwenden, und alsdann Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner zu multipliciren.

1. Zusatz.

§. 89. Wenn es sich zuträgt, daß der Zähler und Nenner des Divisors im Zähler und Nenner des Dividendus gerade etlichemal enthalten ist; so dividiret man gleich mit dem Zähler in den Zähler, und mit dem Nenner in den Nenner. Z. B.

$\frac{4}{12} : \frac{2}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ der Quotient.

Da $\frac{4}{12} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{4}$, die Division aber die Multiplication aufhebet, so muß man den Quotienten erhalten, wenn man mit dem Zähler und Nenner des Divisors in den Zähler und Nenner des Dividendus dividiret.

2. Zusatz.

§. 90. Sollen Brüche durch Ganze dividiret werden, so geschiehet es entweder, daß man den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl multipliciret; (§. 63. Nr. 2.) z. B. $\frac{3}{4}$ soll durch 2 dividiret werden, so ist der Quotient $\frac{3}{8}$.

Da $\frac{1}{8}$ noch einmal so klein als $\frac{1}{4}$ ist, so ist auch klar, daß $\frac{3}{8}$ noch einmal so klein als $\frac{3}{4}$ ist.

Oder man setzt den Divisor 2 auf einen unächten Bruch, der zum Nenner 1 hat, und kehrt ihn um, so erhält man das Nämliche. Z. B.

$\frac{3}{4} : \frac{2}{1}$, so ist $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ wie oben.

3. Zusatz.

§. 91. Sollen Ganze durch Brüche dividiret werden, so wird gleichfalls der Divisor umgekehrt und das Ganze mit dem neuen Nenner multipliciret, oder, welches einerlei ist, die ganze Zahl wird in einen unächten Bruch, wie im vorigen §., verwandelt, der Bruch als Divisor umgekehrt, und alsdann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciret Z. B.

$5 : \frac{4}{7} = \frac{5}{1} : \frac{4}{7} = \frac{5}{1} \times \frac{7}{4} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$.

4. Zu=

4. Zusatz.

§. 92. Sind vermischte Zahlen zu dividiren, so verwandelt man sie vorher in unächte, und verfährt nach den eben gegebenen Regeln. Z. B.

$$18\tfrac{3}{4} : 4\tfrac{1}{2} = \tfrac{75}{4} : \tfrac{9}{2}, \text{ und } \tfrac{75}{4} \times \tfrac{2}{9} = \tfrac{150}{36} = 4\tfrac{6}{36} \mid \tfrac{1}{6}.$$

5. Zusatz.

§. 93. Im gemeinen Leben bedient man sich oft des Ausdrucks $7\frac{1}{2}$ Viertel Elle Tuch kaufen, das ist weiter nichts, als $\frac{15}{2}$ Ellen $\frac{1}{4}$ mal nehmen, oder ein gebrochener Bruch, woraus sich auch der Werth desselben ergiebt, er ist allezeit gleich dem Product der Zähler und Nenner, $= \frac{15}{8}$ Elle; ferner $6\frac{1}{2}$ Achtel Elle. $= 6\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{13}{16}$ Elle.

Sechstes Kapitel.

Von den zehntheiligen Brüchen.

Erklärung.

§. 94. Diejenigen Brüche, deren Nenner 10, oder ein Product aus 10 in 10 ist, heißen: Decimalbrüche oder zehntheilige Brüche.

Also ist der Nenner eines Decimalbruches 1. mit einer oder mehrern Nullen, und das Ganze ist in 10, 100, 1000, 10000 ꝛc. gleiche Theile getheilet. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{15}{100}$, $\frac{18614}{1000}$. Da der letzte Bruch ein unächter ist, so siehet man leicht, daß, nach der Division mit dem Nenner, der Zähler so viel Zahlzeichen erhalten wird, als der Nenner Nullen hat. Z. B. $\frac{18614}{1000} = 18\frac{614}{1000}$; und $\frac{327}{100} = 3\frac{27}{100}$. (§. 36.)

Man siehet, daß man eigentlich den Nenner allezeit wissen kann, wenn der Zähler gegeben ist, oder der Nenner des Bruches genannt wird, ohne daß er jedesmal, wie bei den gemeinen Brüchen, dem Bruche beigefügt werden darf, weil er aus so vielen Nullen bestehet, als der Zähler Zahlzeichen hat. Damit aber

die

die mit den Decimalbrüchen verbundenen Ganzen nicht zu den Brüchen gezählet werden, so setzt man zwischen beide ein Komma (,) auch wohl einen Punct (.) und schreibt die Decimalbrüche übrigens wie ganze Zahlen.

Also haben $4\frac{23}{100}$ und 4,23; $18\frac{248}{1000}$ und 18, 248 einerlei Werth, und werden auf gleiche Art gelesen. Sind keine ganzen Zahlen vorhanden, so schreibt man in die Stelle der Einer eine Null mit einem Komma, und läßt die Zahlzeichen des Decimalbruches von der linken zur rechten folgen. Fehlen aber bei den Decimalbrüchen Zahlzeichen für eine oder mehrere Stellen, so füllt man sie mit Nullen an, wie bei den ganzen Zahlen. Z B. $5\frac{4}{100}$ und $18\frac{6}{1000}$ wird geschrieben: 3,04 und 18,006. Ueberhaupt liegt bei den Decimalbrüchen das gemeine oder dekadische Gesetz der Zahlen zum Grunde, nur mit dem Unterschiede, daß die Ordnung der Stellen von der linken nach der rechten fortgehet, dergestalt, daß ein jedes Zahlzeichen in der folgenden Stelle 10 mal weniger andeutet, also in der ersten Stelle die Einer oder Ganzen, in der zweiten die Zehntheile, in der dritten die Hunderttheile u. s. w. gelten.

Folgende Tabelle giebt eine allgemeine Uebersicht des Werthes bei den Stellen der Decimalbrüche.

6,	sind 6 Ganze	
6,1	= = =	und 1 Zehntheilchen
6,01	= = =	= 1 Hunderttheilchen
6,001	= = =	= 1 Tausendtheilchen
6,0001	= = =	= 1 Zehntausendtheilchen
6,00001	= = =	= 1 Hunderttausendtheilchen
6,000001	= = =	= 1 Milliontheilchen u. s. w.

Eben so:

0,2	sind 0 Ganze	und 2 Zehntheilchen
0,02	= = =	= 2 Hunderttheilchen
0,002	= = =	= 2 Tausendtheilchen u. s. w.

Hieraus

Hieraus siehet man, daß, wenn ein Decimalbruch mit Weglassung des Nenners geschrieben werden soll, man das Zahlzeichen der kleinsten Theile der Einheit im Zähler um so viel Stellen von der Stelle der Einer nach der rechten zu abrücken muß, als der Nenner Nullen enthält.

1. Zusatz.

§. 95. Ist die Stelle der Ganzen durch das Decimalzeichen (,) einmal bestimmt, so kann man einem Decimalbruche rechter Hand soviel Nullen beifügen, als man will, ohne daß der Werth des Bruches geändert wird. So ist z. B. 0,24 = 0, 240 = 0,2400 ꝛc.

denn $0{,}240 = \frac{240}{1000}$; $0{,}2400 = \frac{2400}{10000}$ ꝛc.

Alle diese Brüche aber sind $= \frac{24}{100}$. (§. 77.) = 0,24 (§. 94.)

2. Zusatz.

§. 96. Jede ganze Zahl kann, mit beigefügten Nullen, ebenfalls in der Form eines Decimalbruches geschrieben werden; nur müssen die Nullen rechter Hand, und zwischen diese und dem Zahlzeichen der ganzen Zahl ein Komma gesetzt werden. Z. B.

$12 = 12{,}0 = \frac{120}{10}$; $12{,}00 = \frac{1200}{100}$ ꝛc.

Aufgabe.

§. 97. Decimalbrüche auf einerlei Benennung zu bringen.

Auflösung.

Man hängt rechter Hand an diejenigen Brüche, welche weniger Decimalstellen enthalten als andere, so viel Nullen, bis die gegebenen Brüche gleich viele enthalten. Z. B., es sind gegeben die Brüche:

0,6; 8,045; 3,2301; und 4,00005;

so erhält man an ihrer Statt:

0,60000; 8,04500; 3,23010; und 4,00005.

§. 98.

§. 98. Decimalbrüche zu addiren.

Auflösung.

Da die Decimalbrüche in der nämlichen Ordnung, nur umgekehrt, wie die ganzen Zahlen gehen; (§. 94.) so setzet man die Zahlzeichen so unter einander, daß die Ganzen unter die Ganzen, die Zehntheile unter die Zehntheile rc. zu stehen kommen, welche man alsdann, wie gewöhnlich, addiret. Z. B.

	a)		b)
	5, 7		5, 700000
	8, 03		8, 030000
	14, 487		14, 487000
	6, 0008		6, 000800
	9, 84326		9, 843260
	5, 000006		5, 000006
	49, 061066	=	49, 061066

Wenn man, nach §. 97., die Decimalbrüche unterei- nerlei Benennung bringt, und sie als ganze Zahlen betrachtet; so darf man nur die Zahlen addiren, und den Nenner in der Summe dadurch beibehalten, daß man so viel Decimalstellen rechter Hand abschneidet, als der gemeinschaftliche Nenner Nullen hat, da man die Summe als einen unächten Bruch betrachtet, dessen Zähler, durch den Nenner dividiret, die Ganzen giebt. (§. 59.)

Aus vorstehendem Beispiele siehet man aber, daß zum wirklichen Summiren nicht erfordert werde, die Nullen rechter Hand anzuhängen, sondern daß man sie füglich weglassen könne.

§. 99. Decimalbrüche zu subtrahiren.

Auflösung.

Man setzt die Decimalstellen, wie vorhin, unter einander, und subtrahiret, wie gewöhnlich. Hat der Bruch im Minuendus weniger Decimalstellen, so werden die fehlenden Stellen durch Anhängung von Nullen ersetzt, das ist, mit dem Subtrahendus zu einerlei Benennung gebracht, und die Subtraction ebenfalls nach den gewöhnlichen Regeln (§. 23.) verrichtet. Z. B.

Fälle.

a)	b)	c)
24, 683	9, 35700	8, 4568
8, 324	4, 64834	2, 32
16, 359	4, 70866	6, 1368

Di-

Die Regeln beruhen auf eben den Gründen, wie bei der Addition.

§. 100. Decimalbrüche zu multipliciren.

Auflösung.

Man setze die Decimalzahlen unter einander, und multiplicire selbige, wie die ganzen Zahlen. Dem Producte giebt man so viele Decimalstellen, als beide Factoren zusammen enthalten. Bestehet das Product aus weniger Stellen, so fügt man demselben linker Hand so viele Nullen bei, bis man die gehörige Anzahl Stellen hat, und voran eine Null mit einem Komma; z. B.

Fälle.

a)	b)	c)
6, 423	0, 00045	1, 25
0,26	4,3	1,6
38538	135	750
12846	180	125
1,66998	0, 001935	2,000

Es sind hier zwei Brüche zu multipliciren; deswegen ist das Product ihrer Zähler der Zähler des Products. Da nun der Nenner eines jeden Factoren so viel Nullen hat, als er Decimalstellen enthält, so bekommt das Product der Nenner so viele Nullen, als die Anzahl der Decimalstellen beider Factoren zusammen ausmacht. (§. 32.) und dieser Nenner wird dadurch ausgedrückt, daß man in dem Producte eben so viel Decimalstellen abschneidet. (§. 94.)

§. 101. Decimalbrüche zu dividiren.

Auflösung.

Hat der Dividendus mehr Decimalstellen, als der Divisor, so verfährt man völlig, wie bei den ganzen Zahlen. (§. 35.)

Bleibt zuletzt kein Rest, so schneidet man im Quotienten so viel Decimalstellen ab, als der Unterschied der Stellen im Divisor und Dividendus beträgt.

Hat aber der Dividendus eben so viel oder weniger Decimalstellen, als der Divisor, so füge man demselben so viel

viel Nullen bei, als nöthig sind; das übrige ist wie vorhin.

Bleibt ein Rest, und man will den Quotienten noch genauer finden, so fügt man zu dem Reste so viel Nullen hinzu, als man für gut findet. Z. B.

Fälle:

a) 8, 448 : 9, 6

```
9,6 | 8,448 | 0, 88
       768
      ----
       768
       768
      ----
        ..
```

b) 5, 49 : 2, 57

```
2,57 | 5,49 | 2
       514
     -------
     Rest 35
```

c) 6, 495 : 2573, 4

```
2573,4 | 6,4950 | 0, 002
         51468
       ----------
     Rest 13482.
```

d) 0, 42 : 8, 41

```
8, 41 | 0, 4200 | 0, 04994
          3364
         ------
          8360
          7569
         ------
           7910
           7569
          ------
           3410
           3364
          ------
             46
```

Da durch das Beifügen der Nullen im Dividendus die Brüche auf einerlei Benennung gebracht sind (§. 97.) und alsdann wie ganze Zahlen angesehen werden können; so sind die hieher gehörigen Fälle schon durch die gemeine Division bewiesen.

Der

Der Fall, wenn der Dividendus eben so viel oder mehrere Decimalstellen, als der Divisor, hat, läßt sich auf folgende Art beweisen: Es sei der Fall litt. a.

$$8,448 : 9,6 = \frac{8448}{1000} : \frac{96}{10} =$$

$$\frac{8448 \times 10}{96000} = \frac{8448}{96} \times \frac{1}{100} = 0,88$$

Auf eben diese Art lassen sich auch die übrigen hierher gehörigen Fälle rechtfertigen.

Anmerkung.

Am allerleichtesten erhält man die richtige Bezeichnung des Komma im Quotienten, wenn man beide Brüche durch Anhängung von Nullen auf gleiche Decimalstellen setzt, und sie dann wie ganze Zahlen behandelt. Z. B.

$$8,448 : 9,6 = \tfrac{8448}{1000} : \tfrac{96}{10} = \tfrac{8448}{1000} : \tfrac{9600}{1000}$$

```
also: 9600 | 8448 | 0, 88
           | 84480
             76800
             -----
              76800
              76800
              -----
              .....
```

1. Zusatz.

§. 102. Ist der Dividendus eine ganze Zahl, der Divisor aber ein Decimalbruch, und die Division geht nicht auf; so hängt man dem Reste so viel Nullen an, als man für nöthig findet. Dem Quotienten giebt man von der rechten gegen die linke Hand soviel Decimalstellen, als übrig bleiben, wenn man die Anzahl derselben im Divisor von der angehängten Anzahl subtrahiret. Z. B.

5432 : 2, 4 so ist

```
2,4 | 5432 | 2263,33....
      48
      ---
       63
       48
      ---
       152
       144
      ----
        8000
         72
        ----
          80
          72
         ---
          80
          72
         ---
           8
```

2. Zusatz.

§. 103. Eine Zahl mit Decimalstellen multipliciret und dividiret man mit 10, 100, 1000, 10000 rc., wenn man das Komma im Multiplicandus so viele Stellen gegen die rechte Hand, und im Dividendus gegen die linke Hand rückt, als der Multiplicator oder Divisor Nullen neben der 1 hat. Z. B. $12,45967 \times 10000 = 124596,7$;
und $124596,7 : 10000 = 12,45967$;
oder $24,56 \times 100 = 2456$;
und $2456 : 100 = 24,56$;

Aufgabe.

§. 104. Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung.

Man multiplicire den Zähler des gegebenen Bruchs mit dem Nenner des verlangten Decimalbruches, und dividire das Product durch den Nenner des gegebenen Bruches, oder, welches einerlei ist, man setze an den Zähler des gemeinen Bruches ein Komma, und nach demselben so viel Nullen, als man für nöthig findet, und dividire mit dem Nenner.

Z. B. der Bruch $\frac{3}{4}$ soll in einen 100theiligen verwandelt werden; so ist:

$$\frac{3}{4} \times 100 = \frac{300}{4} = 0,75;$$

denn,

denn, $\frac{3}{4} \times 100 = \frac{300}{400}$ durch 4 aufgeh. $= \frac{75}{100} = 0,75$.

Da sich aber nicht ein jeder Bruch genau in einen Decimalbruch verwandeln läßt, so muß man sich durch Anhängung mehrerer Nullen seinem wahren Werthe so viel als möglich nähern. Z. B.

$$\frac{3}{7} \times 10000 = \frac{3,0000}{7} = 0,4285.$$

Bei einem unächten Bruche enthält aber der Quotient entweder eine ganze Zahl allein, oder eine mit Decimalstellen. Z. B.

$$\frac{7}{4} \times 1000 = \frac{7,000}{4} = 1,750.$$

Anmerkung.

Der Decimalbrüche bedient man sich sowohl in, als außer dem Gebiete der Mathematik, bei Rechnungen des gemeinen Lebens, mit großem Vortheile, besonders bei geometrischen Berechnungen. Johann Müller, (Regiomontanus) aus Königsberg in Franken war der erste, der die Idee von den Decimalbrüchen entwickelte, und den Gebrauch derselben bekannt machte. Er war einer der vorzüglichsten Mathematiker des 15. Jahrhunderts.

Siebentes Kapitel.

Von der Reduction der benannten Zahlen und von den vier Rechnungsarten mit benannten, sowohl ganzen als gebrochenen Zahlen.

Erklärung.

§. 105. Wenn bei einer Zahl die Art und Beschaffenheit der Einheiten, außer ihrer Größe, in Betrachtung kommt, und die Zahlen ihre gewissen Bestimmungen erhalten; so entstehen benannte Zahlen. (§. 3.)

Sie sind eigentlich das Maas, wodurch Größen von einer gewissen Art ausgemessen werden; folglich Einheiten derselben, und demnach Theile von eben dem

Ge-

Geschlechte; also entweder Geld, als Thaler, Groschen ꝛc. oder Längenmaas, z. B. Ellen, Ruthen, Schuhe ꝛc. oder Gewichte, z. B. Zentner, Pfunde, Lothe ꝛc. Da eine Größe nicht allezeit ein jedes Maas ganz in sich enthält, z. B. eine Quantität Geld, nicht blos aus Thalern, eine gewisse Länge, nicht blos aus Ellen ꝛc. bestehen kann, sondern auch oft aus noch kleinern Theilen, als Groschen, Pfennigen oder Zollen bestehet; so hat man ein jedes Maas wiederum in kleinere Theile getheilet, um auch diese richtig ausmessen zu können.

Diese Namen und Eintheilungen der Münzen, Maase und Gewichte ꝛc. sind vorzüglich zu wissen nöthig, wenn man auf wirklich vorhandene Gegenstände Anwendungen der vorhin gegebenen theoretischen Rechnungsregeln machen will.

Die Erfahrung zeigt aber, daß die Eintheilung sehr willkührlich, und in den verschiedenen Staaten und Provinzen auch sehr verschieden ist. Auch kommen bei verschiedenen Gewerben noch besondere Eintheilungen der Maase, Gewichte ꝛc. vor, die man wissen muß, wenn man dahin einschlagende Berechnungen anstellen will.

In folgender Uebersicht können wir uns mit einigen, im bürgerlichen Leben gebräuchlichen, Maasen, Gewichten, Münzen ꝛc. bekannt machen.

I. Uebersicht und Eintheilung einiger Münzen, Maase und Gewichte.

§. 106. A. Münzen.

Neue Schock.	Spec. Thaler.	Reichs-Thaler.	Meißn. Gülden.	Alte Schock.	Reichs-Gulden.	Gute Groschen.	Gute Pfenniges
						1.	12.
					1.	16.	192.
				1.	$1\frac{1}{4}$.	20.	240.
			1.	$1\frac{1}{20}$.	$1\frac{5}{16}$.	21.	252.
		1.	$1\frac{1}{7}$.	$1\frac{1}{5}$.	$1\frac{1}{2}$.	24.	288.
	1.	$1\frac{1}{3}$.	$1\frac{11}{21}$.	$1\frac{3}{5}$.	2.	32.	384.
1.	$1\frac{7}{8}$.	$2\frac{1}{2}$.	$2\frac{6}{7}$.	3.	$3\frac{3}{4}$.	60.	720.

Münzsorten, 20 Gulden-Fuß.

Münzen	Land	Thl.	Gr.	Pf.
Asper	Türkey	—	—	$1\frac{2}{3}$
Augustd'or	Sachsen	5	—	—
Batzen	Reich	—	—	$10\frac{2}{3}$
Copek	Rußland	—	—	$3\frac{1}{4}$
Crone	England	1	12	—
Crusade	Portugal	—	19	—
Doublon	Spanien	5	—	—
Dollar	Amerika	1	9	—
Dütchen	Preußen	—	—	9
Farthing	England	—	—	$1\frac{3}{4}$
Friedrichsd'or	Preußen	5	—	—
Gröschel	Schlesien	—	—	3
Guinee	England	6	8	4
Gulden	Holland	—	13	2
—	Reich	—	16	—
—	Pohlen		4	—
Halfpence	England	—	—	$3\frac{1}{2}$
Imperial	Rußland	6	6	4
Kreutzer	Schlesien	—	—	3
Krone	Dänemark	—	20	5
Livre	Frankreich	—	6	1
Laubthaler	— —	1	12	6
Löwenthaler	Holland	1	3	10
Mark banco	Hamburg	—	11	7
Maxd'or	Bayern	4	4	6
Pence	England	—	—	7
Pfund Sterling	— —	6	7	9
Piaster	Spanien	1	9	1
Piaster	Türkey	—	17	—
Real	Spanien	—	3	1
Rubel 1704	— —	1	9	2
Rubel 1761	Rußland	1	4	4
Rubel 1764	— —	1	—	7
Rupie	Ostindien	—	15	—
Schilling	England	—	7	6
—	Holland	—	3	11
— Banco	Hamburg	—	4	3
— Lübisch	— —	—	1	4

Souve-

Münzen.	Land	Thl.	Gr.	Pf.
Souverain . .	Oesterreich .	8	9	6
Sous . .	Frankreich .	—	—	$5\frac{1}{2}$
Stück von Achten .	Spanien .	1	9	—
Stüber . .	Holland .	—	—	8
Zechino . .	Florenz .	2	20	—
— . .	Genua .	—	7	—
— . .	Venedig .	1	11	2

1. Anmerkung.

Neue und alte Schocke sind nur bei einigen Steuern und Strafgefällen, meißnische Gülden aber bei Verkaufung der Grundstücke in kleinen sächsischen Oertern gewöhnlich.

2. Anmerkung.

Es giebt auch fingirte (eingebildete) Münzen, die zwar im Cours, aber nicht wirklich geprägtes Geld sind; z. B. die erwähnten Meißnischen Gülden, das Pfund Sterling, der toscanische Pezza, das Berliner Pfund Banco rc.

3. Anmerkung.

Der Werth der sächsischen Rechnungsmünzen wird, nach dem Conventionscurrentfuße, die Cöllnische Mark fein Silber zu $13\frac{1}{3}$ Thaler, ausgeprägt.

§. 107. B) Maase.

1. Längenmaase.

a) Klafter- und Ellenmaase.

Klafter,	Elle,	Fuß,	Zolle,	Linien.
			1,	12.
		1,	12,	144.
	1,	2,	24,	288.
1,	3,	6,	72,	864.

b) Zwölftheiliges Ruthenmaas (Duodecimalmaas).

Ruthe,	Fuß,	Zolle,	Linien,	Quarten.
			1,	12.
		1,	12,	144.
	1,	12,	144,	1728.
1,	12,	144,	1728,	20736.

c) Zehntheiliges Ruthenmaaß, (Decimalmaaß.)

Ruthe,	Fuß,	Zolle,	Linien,	Quarten.
			1,	10.
		1,	10,	100.
	1,	10,	100,	1000.
1,	10,	100,	1000,	10000.

1. Anmerkung.

Die zwölftheilige oder Duodecimaleintheilung der Ruthe wird auch häufig das Werkmaas genannt, weil es von den Baumeistern, so wie das zehntheilige oder Decimalmaas von den Mathematikern und Feldmessern, gebraucht wird.

Aber sowohl die Fuß- als die Ruthenmaaße sind in den verschiedenen Ländern auch sehr verschieden.

In dem Verfolge des Lehrbuches wird darüber mehr Anleitung gegeben werden.

In Deutschland bedienet man sich jetzt gewöhnlich der Rheinländischen Ruthe, in Sachsen aber besonders der sächsischen Landruthe, jene zu 6 Ellen 16 Zoll $\frac{408}{1565}$ Linien, diese aber zu 7 Ellen 14 Zoll Dresdner Maaße gerechnet.

Außerdem hat man noch in Sachsen die Straßenruthe zu 8 Dresdner Ellen gerechnet, welche besonders beim Straßenbaue gebraucht wird. Bei den sächsischen Bergwerken rechnet man nach Lachtern zu $3\frac{1}{2}$ Dresdner Elle. Eine Fahrt hält $3\frac{3}{7}$ sächsische Lachtern, oder 12 Dresdner Ellen. Klaftern, Faden, sind an mehrern Orten, nur bei gewissen Geschäften, gewöhnlich.

In Frankreich war ehedem die Toise, so wie in Deutschland noch die Klafter, gewöhnlich. Jene hielt 3 Ellen 10,65 Zoll Dresdner Maas, und war in 6 sogenannte königliche Fuß eingetheilt. Diese hält 3 Dresdner Ellen und wird besonders beim Holzverkaufe gebraucht.

2. Anmerkung.

Bei dem Ellenmaaße ist die Leipziger Elle, in allen königlichen Ländern, im Handel und Wandel und beim Garne, das gesetzliche Maas, und nur im Grossohandel und Verkehr mit ausländischen Kaufleuten ist das fremde Ellenmaas erlaubt worden. Der kleine Unterschied zwischen der Leipziger und Dresdner Elle ist für so wenig zu achten, daß man jetzt beide Ellen, laut Mandat von 1768, für gleich angenommen hat; denn $117\frac{15}{16}$ Leipziger Ellen machen $117\frac{11}{16}$ Dresdner Ellen aus.

3. Anmerkung.

Das Bezeichnen der Längenmaaße ist verschieden, als:
Ruthe mit (o); oder (P); oder (R)

Fuß mit	(I);	oder	(p);	oder	(F)
Zoll	= (II);	=	(d);	=	(Z)
Linie	= (III);	=	(l);	=	(L)
Quarte	= (IV);	=	(q);	=	(Q)

Wir werden uns der letztern Art bedienen.

2) Flächenmaase, (Quadratmaase.)

a) Zwölftheiliges Flächenmaas.

Q. Ruthe.	Q. Fuß.	Q. Zoll.	Q. Linie.	Q. Scrupel
			1.	144.
		1.	144.	20736.
	1.	144.	20736.	2985984.
1.	144.	20736.	2985984.	429981696.

b) Zehntheiliges Flächenmaas.

Q. Ruthe.	Q. Fuß.	Q. Zoll.	Q. Linie.	Q. Scrupel.
			1.	100.
		1.	100.	10000.
	1.	100.	10000.	1000000.
1.	100.	10000.	1000000.	100000000.

1. Anmerkung.

Die Quadratelle enthält 4 Quadratfuß oder 576 Quadratzoll; der Quadratfuß aber 100 Decimal= oder 144 gemeine Quadratzoll.

2. Anmerkung.

Der Schragen Holz ist 3 Klaftern lang und 1 Klafter hoch, folglich 3 Quadr. Klaftern zu 9 Quadratellen, die 27 Quadratellen an der Seite betragen. Zehn Klaftern 7 Viertel langes Holz werden erfordert, um einen Ring Kohlen zu brennen.

3. Anmerkung.

Um das Flächenmaas zu bezeichnen, bedient man sich des Buchstabens Q oder des Zeichens □.

3) Körperliches Maas, (Cubikmaas.)

a) Zwölftheiliges körperliches Maas.

C. Ruthe.	C. Fuß.	C. Zolle.	C. Linie.	C. Scrupel.
			1.	1728.
		1.	1728.	2985984.
	1.	1728.	2985984.	5159780352.
1.	1728.	2985984.	5159780352.	8916100448256.

b) Zehn=

b) Zehntheiliges körperliches Maas.

C. Ruthe.	C. Fuß.	C. Zolle.	C. Linie.	C. Scrupel.
			1.	1000.
		1.	1000.	1000000.
	1.	1000.	1000000.	1000000000.
1.	1000.	1000000.	1000000000.	1000000000000.

Anmerkung.

Um das körperliche oder Cubikmaas zu bezeichnen, bedient man sich des Buchstabens C. oder K.

4) Getreidemaas.

Wispel.	Malter.	Scheffel.	Viertel.	Metzen.	Mäßchen.
				1.	4.
			1.	4.	16.
		1.	4.	16.	64.
	1.	12.	48.	192.	768.
1.	2.	24.	96.	384.	1536.

Anmerkung.

Der Dresdner Scheffel ist das allgemeine sächsische Getreidemaas beim öffentlichen Verkaufe. Er hält an Korn ohngefähr 166 Dresdner Pfund.

5) Weinmaase.

Fuder.	Faß.	Eimer.	Kannen.	Nösel.	Quart.	
				1.	4.	Leipziger Schenk-Maas.
			1.	2.	8.	
		1.	63.	126.	504.	
	1.	5.	315.	630.	2520.	
1.	$2\frac{2}{5}$.	12.	756.	1512.	6043.	

Anmerkung.

Der Leipziger Eimer von 63 Kannen Schenkmaas wird auch zu 54 Visirkannen, oder 81 Dresdner Kannen gerechnet. Der Dresdner Eimer aber hat 72 Dresdner, 56 Leipziger oder 48 Visirkannen.

6) Biermaase.

Dresdn. Faß.	Viertel.	Tonnen.	Visirkannen.	Dr. Kannen.
			1.	$1\frac{1}{2}$.
		1.	70.	105.
	1.	2.	140.	210.
1.	2.	4.	280.	420.

Anmer-

Anmerkung.

Ein Gebräude Bier hält zu Dresden 24, zu Leipzig 16 Faß. Das Dresdner Biermaas ist das gesetzliche durch das ganze Land.

7) Zeitmaas.

Tage.	Stunden.	Minuten.	Secunden.	Tertien.
			1.	60.
		1.	60.	3600.
	1.	60.	3600.	12600.
1.	24.	1440.	86400.	5184000.

Anmerkung.

Die Länge des tropischen Sonnenjahres, welches im gemeinen Leben gebraucht wird, weil die Jahreszeiten davon abhängen, ist, nach den besten Beobachtungen, 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 45 Secunden.

Im gemeinen Leben, wo man bei der Jahresrechnung nur ganze Tage und Wochen gebrauchen kann, rechnet man auf ein bürgerliches Jahr 365 Tage 6 Stunden. Von diesem Jahre, welches man, nach seinem Urheber, auch das Julianische Jahr, oder das Jahr des alten Kalenders, oder des alten Styls, nennt, bringt man aber nur 365 Tage in Rechnung, und giebt, nach Verfließung jedesmaliger 3 Jahre, jedes von 365 Tagen, dem vierten einen Tag mehr; also in allem 366 Tage.

Dieser hinzugesetzte Tag (eingeschaltete Tag, Schalttag) fällt auf den nächsten Tag nach dem 28. Februar, und ein solches Jahr heißt ein Schaltjahr; das von 365 Tagen aber ein gemeines Julianisches Jahr, oder schlechthin, ein gemeines Jahr.

Ein gemeines Jahr enthält also, da 7 Tage eine Woche ausmachen, 52 Wochen und 1 Tag; ein Schaltjahr aber enthält 52 Wochen und 2 Tage.

Jedes Jahr hat 12 Monate (bürgerliche Sommermonate), deren Namen, vom Januar bis zum December, allgemein bekannt sind.

Der Februar hat, im gemeinen Jahre, 28, und im Schaltjahre, 29 Tage.

Die vier Monate: April, Junius, September und November, haben jeder 30 Tage, von den übrigen aber jeder 31 Tage.

Da das Julianische Jahr um 11 Minuten, 14, 5 Secunden größer als das tropische ist, so mußte dieses nach vielen Jahren beträchtlich werden, so daß man gezwungen war, 1700 und 1800 gemeine Jahre sein zu lassen, und eben so wird 1900 ein gemeines Jahr, aber 2000 wird ein Schaltjahr sein.

Noch ist zu bemerken, daß im Handel und Wandel das Jahr mehrentheils zu 360 Tagen, und der Monat zu 30 Tagen, in Rechnung gebracht wird.

§. 108. C) Gewichte.

1) Krämergewicht.

Zentner.	Stein.	Pfund.	Loth.	Quent.	Pfenniggewicht.
				1.	4.
			1.	4.	16.
		1.	32.	128.	512.
	1.	22.	704.	2816.	11264.
1.	5.	110.	3520.	14080.	56320.

Der Zentner Fleischergewicht hält 102 Pfund
" " Berggewicht " 114 "

2) Gold- und Silbergewicht.

Mark.	Unzen.	Loth.	Karat.	Quent.	Pfenniggw.	Grän.	Hellrgw.
						1.	$1\frac{7}{9}$.
					1.	$1\frac{1}{8}$.	2.
				1.	4.	$4\frac{1}{2}$.	8.
			1.	$2\frac{2}{3}$.	$10\frac{2}{3}$.	12.	$21\frac{1}{3}$.
		1.	$1\frac{1}{2}$.	4.	16.	18.	32.
	1.	2.	3.	8.	32.	36.	64.
1.	8.	16.	24.	64.	256.	288.	512.

3) Apothekergewicht.

Pfund.	Unze.	Drachme.	Scrupel.	Gran.
			1.	20.
		1.	3.	60.
	1.	8.	24.	480.
1.	12.	96.	288.	5760.

1. Anmerkung.

Das Juwelengewicht für Edelgesteine und Perlen ist in ganz Europa gleich, und wird nach Karat zu 4 Gran, oder nach 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ rc. Karat gerechnet.

2. Anmerkung.

Beim Schiffsgewichte hält: Eine Last 2 Tonnen.
" Tonne 20 Centner.

3. Anmerkung.

Um die verschiedenen Gewichte zu bezeichnen, bedient man sich folgender Buchstaben oder Zeichen:
Zentner mit (Z.)
Stein " (St.)

Pfunde

Pfunde	mit	(Pf.) oder (℔)
Lothe	=	(Lt.)
Quentchen	=	(Qt.)
Grän	=	(Gr.)
Unze	=	(Uz.)
Scrupel	=	(Sc.) ꝛc.

§. 109. D) Papierhandel.

Ballen.	Rieß.	Buch.	Bogen.
		1.	24.
	1.	20.	480.
1.	10.	200.	4800.

E) Garnhandel.

Stückgarn.	Strähn.	Zaspel.	Gebind.	Faden.	Ellen.
				1.	4.
			1.	20.	80.
		1.	20.	400.	1600.
	1.	2.	40.	800.	3200.
1.	6.	12.	240.	4800.	19200.

§. 110. Französische Maase.

Die ungeheure Menge von Maasen, welche nicht nur bei den verschiedenen Nationen, sondern selbst bei der nehmlichen Nation üblich sind, ihre so mannigfaltigen, für die Rechnungen größtentheils unbequemen Eintheilungen, die Schwierigkeiten, sie kennen zu lernen und zu vergleichen, ließ schon längst die Nothwendigkeit fühlen, ein System von Maasen anzunehmen, deren gleichförmige Eintheilungen sich am leichtesten berechnen lassen, und welches auf die am wenigsten willkührliche Art, von einem durch die Natur selbst vorgeschriebenen Grundmaase, herzuleiten ist.

Frankreich fühlte dieses Bedürfniß zuerst; die Geschichte nennt uns einige seiner Könige, welche das wichtige Project ausführen wollten, in ihrem Reiche einerlei Maas und Gewichte einzuführen, allein es gelang ihnen nicht. Erst zur Zeit der republicanischen Verfassung gelang es der konstituirenden Versammlung (d. 21. Jul. 1793.) diesen großen Plan gesetzmäßig zu entwerfen, und dessen Ausführung vom 23. Sept. 1801. an, im ganzen französischen Reiche beginnen zu sehen.

Die Länge des Pendels und die des Meridians sind

die zwei Mittel, welche die Natur darbietet, um die Einheit des Längenmaases festzusetzen.

Man bestimmte sich für das zweite Mittel, wovon schon Aristoteles im höchsten Alterthume Gebrauch machte, indem er die Länge eines solchen Meridians auf 100000 Stadien festsetzte, da das erstere mehrere Unbequemlichkeiten hatte.

Die höchste Bequemlichkeit der Decimalrechnung läßt keinen Zweifel über die Vortheile der Eintheilung aller Arten von Maasen in Decimaltheile übrig, man trug daher kein Bedenken, diese Decimaleintheilung anzunehmen, und um die höchste Einförmigkeit in das ganze System der Maase und Gewichte zu bringen, beschloß man, sie von einerlei Längenmaase und dessen Decimaleintheilung herzuleiten. Es kam nun darauf an, die Länge des Meridianquadranten genau zu wissen, welche denn auch aus der Größe des Bogens, der von Dünkirchen bis an die Pyrenäen durch Frankreich gehet, und welcher von de Lambre und Michain sorgfältig gemessen worden war, geschlossen wurde.

Nun nahm man den zehnmillionsten Theil dieses Quadranten, oder welches einerlei ist, den einhunderttausendsten Theil des Meridiangrades für die Einheit des Längenmaases an, und nannte ihn Mètre (Meter), dessen Länge nach Laplace Exposition du Systeme du monde, seconde Edition, à Paris, An VII., in 4to, pag. 72. = 0,513074 Toisen = 3,078444 par. Fuß = 3 par. F. 0 Zoll 11,295936 Linien = 443,295936 Linien pariser Duodecimalmaaß groß gefunden wurde, wobei zu erinnern ist, daß bei diesem neuen System der Meridian nicht in 360, sondern in 400 Grade eingetheilt wurde. Nach dieser Bestimmung wurde denn nun ein genau gefertigter und berichtigter Maasstab bei dem gesetzgebenden Ausschusse niedergelegt und in der Folge wurde diese Länge noch über dieses mit der des Pendels auf eine sehr genaue Art in Verbindung gebracht, so daß es wohl nun nicht mehr nöthig seyn dürfte, wieder zu der Messung des Bogens zurückzugehen.

Alle Maase ergeben sich nun auf die einfachste Art aus dem Meter, als der Grundeinheit des Längenmaases.

Die

Die Längenmaase sind nun entweder vielfache oder Decimaltheile davon.

Die Einheit der Flächenmaase ist ein Quadrat, dessen Seite 10 Meters groß ist, und Are (Are) genennet wird.

Die Einheit des Körpermaases ist ein Würfel, dessen Seite einen Meter groß ist, und welcher man den Nahmen Stere (Stere), beigelegt hat.

Die Einheit der Hohlmaase für flüssige Körper ist ebenfalls ein Würfel, dessen Seite der zehnte Theil des Meters, nehmlich einen Decimeter, beträgt, und welcher man den Namen Litre (Liter) gegeben hat.

Die Einheit des Gewichts, die man Gramme (Gramme) genannt hat, ist das absolute Gewicht des destillirten Wassers im Zustande der größten Verdichtung, und bei der Temperatur des schmelzenden Eises, ein Würfel vom hundertsten Theile des Meters.

Da alle Maase beständig mit dem Pfunde der Münze verglichen werden, so war es besonders nöthig, auch diese in Decimaltheile zu theilen. Man gab ihm den Namen Franc d'argent (Frank). Um die Berechnung des in den Münzen enthaltenen feinen Goldes und Silbers zu erleichtern, hat man die Vermischung auf den zehnten Theil ihrer Gewichte festgesetzt, und das Gewicht des Franks dem von 5 Grammen gleich gemacht.

Wegen der Oberabtheilung jeder der obenerwähnten einzelnen Maaseinheiten hat man die aus dem Griechischen hergeleiteten Wörter angenommen, als:

	Myria	für	10000
	Kilo	"	1000
	Hecto	"	100
und	Deca	"	10.

Bei den Unterabtheilungen aber die aus dem Lateinischen hergenommenen Wörter, als:

Deci	für	$\frac{1}{10}$
Centi	"	$\frac{1}{100}$
Milli	"	$\frac{1}{1000}$
Decimilli	"	$\frac{1}{10000}$.

Folgende zwei Tafeln zeigen die Verhältnisse der metrischen Benennungen, und zwar die erste für die Maase, die

die größer, und die zweite für die, welche kleiner als die Einheit sind.

Erste Tafel.

Myria	Kilo	Hecto	Deca	Einheit
Mètre Litre Gramme	Mètre Litre Gramme	Mètre Litre Gramme	Mètre Litre Gramme	Mètre Litre Gramme
1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

Zweyte Tafel.

Einheit	Deci	Centi	Milli	Decimilli
Mètre Litre Gramme	Mètre Litre Gramm	Mètre Litre Gramme	Mètre Litre Gramme	Mètre Litre Gramme
1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

Man versteht also z. B. unter
Myriamètre ein 10000faches Mètre; unter
Kilomètre ein 1000faches Mètre ꝛc.

Eben so unter
Decimètre das $\frac{1}{10}$ Mètre; unter
Centimètre das $\frac{1}{100}$ Mètre ꝛc.

So werden auch bei dem Körpermaaße die Summen der Litres und bei dem Gewichte die Summen der Grammen benennet.

Bei Ausmessung der Flächen ist es gewöhnlich, den quadrirten Meter, statt Centiare, oder die quadrirten Theile, oder auch die quadrirten Vielfachen des Meters für die Einheit anzunehmen, hierdurch sind die Benennungen Quadratmeter, oder quadrirter Meter, quadrirter Decimeter, quadrirter Centimeter,

qua-

quadrirter Decameter, (eine Are) quadrirter Hectometer, quadrirter Kilometer (eine Million Quadratmeters) ꝛc. verständlich.

Bei Ausmessung der Körper ist es ebenfalls gewöhnlich, den kubirten Meter, oder die kubirten Theile, oder auch die kubirten Vielfachen des Meters für die Einheit anzunehmen.

Hierdurch werden die Benennungen, kubirter oder kubischer Meter, kubirter Decimeter (ein Liter) kubirter Centimeter, ꝛc. ebenfalls verständlich.

Bei Ausmessung des Brennholzes bedient man sich insbesondere des Kubikmeters unter dem eigenen Namen Ster (Stere). Zehn Ster heißen ein Decaster, zwanzig Ster ein Doppel-Decaster (Double Decastère); fünf Stere hingegen ein halb Decaster (Demi-Decastère).

Da man in Frankreich, um das metrische System dem Publicum verständlich zu machen, sich genöthigt sahe, solches in die alte metrologische Sprache zu übersetzen; so ist die Angabe des Gehalts der Größen dieses Systems nach dem alten königl. französischen oder dem ehemaligen pariser Maas und Gewicht dasjenige Mittel, dessen man sich bedienen muß, um den Gehalt desselben nach der Maas- und Gewichtskunde in andern Ländern zu bestimmen.

Der verstorbene General, Freiherr von Vega hat in seinem, nach seinem Tode bei Degen in Wien herausgekommenen Maas-, Gewichts-, und Münzsystem den Meter ebenfalls zu 443,2959 Duodecimallinien des vormaligen pariser Fußes, = 3 Fuß 0 Zoll 11,2959 Linien angenommen, welches Verhältniß denn bei den folgenden Tabellen, so wie die pariser Fuß zu 144,0 pariser Linien und die sächsische oder dresdner Elle zu 250,9 solcher pariser Linien zum Grunde gelegt worden.

Nach diesem Verhältnisse bestimmt sich nun der Meter genau auf 1,766822 dresdn. Elle = 1 Elle 18,403728 Zoll = 1 Elle 18 Zoll 4,844736 Linien, ohngefähr $4\frac{4}{5}$ oder beinahe 5 Linien; so wie nun 1000 dresdner Ellen 1742 pariser Fuß, und 1000 pariser Fuß 574 dresdner Ellen geben.

Bei

Bei dem Flächenmaaße bestimmt sich nun hiernach der Quadratmeter genau auf 3,121663 Quad.Ellen = 3 Q.Ell. 70 Q.Zoll und 11,215 Q.Linien.

Der sächsische Acker Landes ist zu 300 Q.Ruthen, die Quadratruthe = $57\frac{73}{144}$ Quadratellen, und folglich der Acker = $17252\frac{1}{12}$ Quadratellen angenommen.

Es vergleichen sich nun 1000 dresdner Quadratellen mit 3036 par. Quadratfuß und 1000 par. Quadratfuß mit 329 dresdner Quadratellen und 300 Q.Ruthen sind nun = 52377 pariser Quad.Fuß, und 1 Quadratruthe beinahe = 174 par. Quad.Fuß.

Bei dem Körpermaaße ist der Cubikmeter genau zu 5,515425 dresdner Cubikellen = 5 Cub.Ellen 7125 C.Zoll 406,4256 C.Linien bestimmt worden.

Hier sind nun 1 dresdner Cubikelle = 5,29 pariser Cub.Fuß, und 100 Cub.Ellen = 529 par. C.Fuß und 1000 par. Cub.Fuß = 189 Cub.Ellen.

Bei dem Hohlmaaße für flüssige Körper ist der Liter zu 1,068063 dresdner Kanne, oder 0,8305217 leipziger Kanne berechnet worden, wobei die leipz. Kanne = 60,7, die dresdner aber = 47,2 pariser Duodecimalzoll, der Eimer aber zu 72 Dresdner Kannen angenommen worden.

Bei dem Hohlmaaße für trockene Körper ist der dresdner Scheffel = 5378,025 pariser Cubikzoll angenommen worden. Rosenthal in seinem Münz-, Maas- und Gewichtssystem nimmt den Dresdner Scheffel zu 3,129 pariser Cubikfuß an, welche aber 5406,912 par. Cub.Zoll, und nicht nach seiner Angabe 5361,8 p. C.Zoll geben. Nach obigem Verhältniß bestimmt sich nun der Liter genau auf 0,00927382 dresdn. Scheffel.

Bei dem Schwermaaße ist das dresdner oder sächsische Pfund zu 9716 holländischen Aß angenommen worden.

Nach Laplace wiegt 1 pariser Pfund 10188 Holländische As; hieraus hat man gefunden, daß der Gramme
= 0,002142118 dresdn. Pfund oder
0,068547776 dresdner Loth oder
0,274191104 dresdn. Quent., also ohngefähr ¼ Quent. schwer ist. Es sind nun 1000 leipz. Pfund = 46683 Grammen.

1) Län-

Namen de[s] metrischen Systems	sächsischem Ellenmaase.
Quart du Meridien	7668220 Dresdner Ellen
Degré	76682,2 D. E. = 176682 E. 4 Z. 9,6 Linien. oder $\frac{3}{5}$.
Myriamètre	7668,22 = = = 17668 = 5 = 3,36 Lin. ohngef. $9\frac{1}{25}$ Lin.
Kilomètre	766,822 = = = 1766 = 19 = 8,736 Lin. ohngef. $3\frac{3}{4}$ Lin.
Hectomètre	76,6822 = = = 176 = 16 = 4,4736 Lin. ohngef. $\frac{12}{25}$ Lin.
Decamètre	7,66822 = = = 17 = 16 = 0,44736 Lin. ohngef. $\frac{11}{25}$ Lin.
Mètre	766822 = = = 1 = 18 = 4,844736 Lin. ohngef. $\frac{11}{13}$ beinahe 5 =
Decimètre	1766822 = = = = 4 = 2,88447 Lin. ohngef. $\frac{13}{15}$ beinahe 3 =
Centimètre	0176682 = = = = = 5,08844 Lin. ohngef. $\frac{11}{125}$ Lin.
Millimètre	0017668 = = = = = 0,50884 Lin. ohngef. $\frac{12}{25}$ beinahe $\frac{1}{2}$.
Decimillimètre	000176 = = = = = 0,05088 Lin. ohngef. $\frac{1}{20}$ Lin.

Par. Linien.

a s.

en nach

	sächsischem Maase.
166,3 Quad. Ell.	= 312166 Q. E. 172 Q. Z. 28 Q. Lin.
	oder
8,3 Q. R.	= 5428 Q. R. 30 Q. F. = 18,094 Ack.
16,63 Q. E.	= 31216 Q. E. 362 Q. Z. 118 Q. L.
	oder
,83 Q. R.	= 542 Q. R. 83 Q. F. = 1,8094 Ack.
1,663 Q. E.	= 3121 Q. E. 381 Q. Z. 127 Q. L.
	oder
283 Q. R.	= 54 Q. R. 28 Q. F. 30 Q. Z.
,1663 Q. E.	= 312 Q. E. 95 Q. Z. 113,5 Q. L.
	oder
283 Q. R.	= 5 Q. R. 42 Q. F. 83 Q. Z.
21663 Q. E.	= 31 Q. E. 124 Q. Z. 112,15 Q. L.
	oder
4283 Q. R.	= — ⸗ 9 R. 54 Q. F. 28,3 Q. Z.
21663 Q. E.	= 3 Q. E. 70 Q. Z. 11,215 Q. L.
	oder
54283 Q. Ruth.	= — ⸗ — ⸗ 5 Q. F. 42,83 Q. Z.
12166 Q. E.	= — ⸗ 179 Q. Z. 116,321 Q. L.
	oder
05428 Q. R.	= — ⸗ — ⸗ 54,283 Q. Z.
31216 Q. E.	= — ⸗ 17 Q. Z. 141,232 Q. L.
	oder
08542 Q. R.	= — ⸗ — ⸗ 5,428 Q. Z.

= 182 Zoll. Die Quad. Ruthe = 33124 Quad. Ellen-Zolle.

Nam… metr… Sys…	…ch sächsischem Maase.
Dec…	…Ell. = 55 C. Ell. 2132 C. Z. 608,25 C. Lin.
Stère	„ = 5 „ „ 7125 „ „ 406,425 „ „
Dec…	„ = — „ „ 7624 „ „ 904,6424 „ „
Cent…	„ = — „ „ 762 „ „ 781,6642 „ „
Milli…	„ = — „ „ 76 „ „ 423,7664 „ „

Körper.

nach

sächsischem Maase.

Dresdn. Kan. = 14 Eym. 60 Kan. — Nöss. — Qu.
oder
0,5 Leipziger Kannen.

Dresdn. Kan. = 1 Eym. 34 Kan. 1 Nöss. 2,4 Qu.
ohngefähr $\frac{2}{5}$ Quart.
oder
)5 Leipziger Kannen.

Dresdn. Kan. = — Eym. 10 Kan. 1 N. 1,44 Qu.
beinahe $\frac{1}{2}$ Quart.
oder
,3 Leipziger Kannen.

Dresdn. Kan. = — Eym. 1 Kan. — N. 0,544 Qu.
ohngef. $\frac{2}{5}$ Quart.
oder
eipziger Kannen, ohngefähr $\frac{2}{3}\frac{1}{5}$ Kanne.

8 Dresdn. Kan. = ohngefähr $\frac{5}{6}$ Quart,
oder
3 Leipziger Kannen, ohngefähr $\frac{1}{12}$ Quart.

rper.

Name… metri… Syst…	sächsischem Maaße.
Kiloli…	Schfl. = 9 Schfl. 5 Mtz. 3,9 Mäschen. ohngefähr 6 Mtz.
Hecto…	= = — 14 Mtz. 3,99 M. ohngefähr 15 Mtz.
Decali…	= = — 1 Mtz. 1,999 M. ohngefähr 2 Mäschen.
Litre	= = — — 0,5999 M. ohngefähr $\frac{3}{5}$ Mäsch.
Decilit…	= = — — 0,05999 M. ohngefähr $\frac{3}{15}$ Mäsch.

D… 78,025 paris. Cub. Zolle angenommen.

:maas.

nach

sächsischem Gewichte.

2118 Pfd. oder
4777 Lth. = 21 Pfd. 13 Lth. 1,9 Q. beinahe 2 Q.

2118 Pfd. oder
4777 Lth. = 2 Pfd. 4 Lth. 2,219 Q. ohngef. $\frac{1}{5}$ Q.

42118 Pfd. oder
4777 Lth. = – Pfd. 6 Lth. 3,419 Q. ohngef. $\frac{2}{5}$ Q.

142118 Pfd. oder
54777 Lth. = – Pfd. – Lth. 2,7419 Q. ohngef. $\frac{3}{4}$ Q.

2142118 Pfd. oder
8547776 Lth. = – Pfd. – Lth. 0,27419 Q. oder
0905 Pfd. Gew. Handels-Gewicht.

02142 Pfd. oder
68547 Lth. = – Pfd. – Lth. 0,027419 Q. oder
,1096 Pfd. Gewicht ohngef. $\frac{3}{28}$ Q.

002142 Pfd. oder
06854 Lth. = – Pfd. – Lth. 0,00274 Q. oder
,01096 Pfd. Gew. ohngef. $\frac{34}{3125}$ Pf. Gew.

163 holl. Aß angenommen.

Der g fränkischen Eintheilung.

	400 Grade.
Der Gr	100 Minuten.
Die Min	100 Secunden.

D fränkischen Eintheilung.

	10 Stunden.
Die Stu	100 Minuten.
Die Min	100 Secunden.

Die n Tage der Gründung der fränkischen Republik, a Meridian von Paris, ins Zeichen der Waage tritt; wurde, wegen der Zeitverwirrung in französischen he Kalender wieder eingeführt. Jedes ihrer Jahre Monate, jeden zu 30 Tagen, eingetheilt, zu welchen, der letztere in jedem hundertsten Jahre weggelassen, thielten demnach 400 fränkische Jahre 146000 gewöh 5 Tage, 5 Stunden, 19 Minuten, 12 Secunden e Monate sind: 1) Vendemiaire (vom 23sten Septen imaire (vom 22sten November — 21sten December); 9ten Februar); 6) Ventose (vom 20sten Februar — 2 April — 20sten May); 9) Prairial (vom 21sten May — (vom 20sten Julius — 18ten August); 12) Fructidor er.

ischen und deutschen Münzen.

Betragen				
in sächsischem Gelde.			nach dem 24 Guld.F.	
Rthlr.	Gr.	Pfenn.	Gulden.	Kreuzer.
10	—	—	18	16
5	—	—	9	8
12	—	—	22	—
6	—	—	11	—
1	12	—	2	45
—	18	—	1	22½
1	10	6	2	42
1	6	—	2	17½
—	12	—	—	55
—	6	—	—	27½
—	—	8	—	3
—	—	1	—	⅓

echnete man in Frankreich nach Livres und Sous;
s = 80 Francs jetziger Währung.

II. Reduction auf kleinere oder größere Einheiten.

§. 111. Die angegebenen Eintheilungen enthalten die Zahlen, welche anzeigen, wieviel Einheiten der kleinern Art Eine von der größern Art ausmachen, so daß man Einheiten der kleinern Art in Einheiten der größern verwandeln kann, oder überhaupt: benannte Zahlen von einer gewissen Benennung auf einen andern Namen oder eine andere Benennung bringen kann. Diese Verwandlung selbst kann man Reduction nennen.

Diese Reduction kann auf zweierlei Art geschehen, indem man entweder:

a) größere Einheiten auf kleinere; und zwar mit Hülfe der Multiplication, oder:

b) kleinere Einheiten auf größere, und zwar mit Hülfe der Division bringen kann.

Aufgabe.

§. 112. Eine benannte ganze Zahl auf kleinere Einheiten zu bringen.

Auflösung.

Man multiplicire jede Zahl durch ihr eigenthümliches Maas, und addire zu jedem Producte die mit der Zahl verbundenen kleineren Einheiten. Z. B. es sollen 26 Thlr. 12 Gr. 6 Pf. in Pfennigen ausgedrückt werden, so ist:

```
26 Thlr. 12 Gr. 6 Pf.
   24
  ----
  104
  52
  ----
  624
+  12 Gr.
  ----
  636
   12
  ----
 1272
 636
 -----
 7632
+   6 Pf.
 -----
 7638 Pf.
```

also sind 26 Thlr. 12 Gr. 6 Pf. = 7638 Pfennige.

Aufgabe.

§. 113. Benannte Zahlen auf größere Einheiten zu bringen.

Auflösung.

Man dividiret die gegebene Zahl stufenweise durch ihr eigenthümliches Maas, bis man die verlangte Einheit erhält. Z. B. es sollen 1828 Duodecimalzolle auf Fuß und Ruthen gesetzt werden, so ist:

```
12 | 1828 | 152 Fuß u. 12 | 152 | 12 Ruth. 8 Fuß u. 4 Zoll.
     12                      12
     ----                    ---
     62                      32
     60                      24
     ----                    ---
     28                      8 Fuß.
     24
     ----
     4 Zoll.
```

Zusatz.

§. 114. Auch gebrochene benannte Zahlen werden auf einen kleinern oder größern Namen gebracht, wenn man, im ersten Falle, mit der Reductionszahl den Bruch multipliciret, im andern Falle aber dividiret, und dem Resultate den niedrigern oder höhern Namen giebt. Z. B.

1) Nach §. 108. ist $\frac{2}{9}$ Zentn. $= {}_{2} \times 110$ Pf. $= \frac{220}{9}$ Pf. $= 24\frac{4}{9}$ Pf., weil aber $\frac{4}{9}$ Pf. $= \frac{4}{9} \times 32$ Lth. $= \frac{128}{9} = 14\frac{2}{9}$ Lth. und $\frac{2}{9}$ Lth. $= \frac{2}{9} \times 4$ Qt. $= \frac{8}{9}$ Qt., so ist auch $\frac{2}{9}$ Zentn. $= 24$ Pf. 14 Lth. $\frac{8}{9}$ Qt. (§. 85.)

Ferner: $\frac{3}{5}$ Ruthen Duodecimalmaas $= \frac{3}{5} \times 12 = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ Fuß. $\frac{1}{5}$ Fuß aber $= \frac{1}{5} \times 12 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ Zoll: $\frac{2}{5}$ Zoll aber $\frac{2}{9} \times 12 = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ Linien, und so ist $\frac{3}{5}$ Ruthen Duodecimalmaas $= 7$ Fuß 2 Zoll $4\frac{4}{5}$ Linien. Endlich $\frac{4}{5}$ Ruthen Decimalmaas aber $= \frac{4}{5} \times 10 = \frac{40}{5} = 0{,}8$ Ruthen $=$ 8 Fuß. Eben so $\frac{3}{4}$ Ruthe $= \frac{3}{4} \times 10 \times 10 = \frac{300}{4} = 0{,}75$ Ruthe $= 7$ Fuß 5 Zoll.

2) Nach §. 106. ist umgekehrt 18 gr. $= \frac{18}{24}$ Thlr. $= \frac{3}{4}$ Thlr. eben so 8 pf. $= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ gr. $\frac{2}{3}$ gr. aber $\frac{2}{3} : 24 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{24}$ (§. 90.) $= \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$ Thlr.

Ferner: $\frac{4}{5}$ Fuß Duodecimalmaas $= \frac{4}{5} : 12 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{12}$ (§. 90.) $= \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ Ruthe. Endlich sind 5 Decimalfuß $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ Ruthe $= 0{,}5$ Ruthen, und so auch 5 Decimallinien

mallinien = $\frac{5}{10}$ = $\frac{1}{2}$ Zoll = 0,5 Zoll = $\frac{0,5}{10}$ Fuß = 0,05 Fuß = $\frac{0,05}{10}$ Ruthen = 0,005 Ruthen.

III. Addition.

Aufgabe.

§. 115. Die Addition mit benannten ganzen Zahlen zu verrichten.

Auflösung.

Die benannten Zahlen werden eben so, wie die unbenannten, addiret, indem man die gleichartigen Dinge zusammen zählet, nur mit dem Unterschiede, daß man hier nicht auf 10, sondern allezeit so viel Einheiten zusammen zählet, als zu einem höhern Werthe erfordert werden. Z. B. bei den Pfennigen zählt man nur auf 12, bei den Groschen nur auf 24 rc., weil 12 Pfennige einen Groschen und 24 Groschen einen Thaler ausmachen.

So viel man nun bei den Pfennigen bis auf 12 gezählet hat, so viel Einheiten oder Groschen müssen zu den Groschen, und so viel man bei den Groschen bis auf 24 gezählet hat, so viel Einheiten oder Thaler müssen zu den Thalern gerechnet werden.

Dieses gilt auch von allen übrigen Arten von benannten Zahlen. Z. B. es sollen folgende Geldposten in eine Summe gebracht werden:

	(2)	(1)	
	322 Thlr.	22 gr.	9 Pf.
	1818 "	4 "	7 "
	13 "	12 "	4 "
	1048 "	23 "	- "
so ist die Summe:	3203 Thlr.	14 gr.	8 pf.

Hier kann man bei den Pfennigen nur einmal bis 12 zählen, und noch 8 bleiben übrig. Dieser Groschen wird zur folgenden Classe der Groschen gerechnet, und die 8 Pfennige werden unter die Stelle der Pfennige gesetzt. Wir erhalten aber dieses, wenn wir die Summe = 16 Pf. durch 12 dividiren.

Das nämliche gilt auch bei den Groschen; denn, zählet man diese zusammen, so erhält man 62 Groschen; diese, mit 24 dividiret, geben 2 Thlr. 14 gr., welche letztere unter die Groschen gesetzt, erstere aber zu den Thalern gerechnet werden.

 Auf-

Aufgabe.

§. 116. Ganze und gebrochne Zahlen zu addiren.

Auflösung.

Sind mit den benannten Zahlen Brüche von einerlei oder verschiedenen Nennern verbunden, so verfährt man nach §. 79., indem man die letztern zu einerlei Benennung bringet, ihre Zähler addiret, und die Ganzen findet, welche man hernach zu den Ganzen zählet.

Z. B. Es soll folgender Transport Salpeter in eine Summe gebracht werden:

	(1)		(1)				48
	142	Zentn.	84	Pf.	$16\frac{1}{2}$	Lt.	24
	41	"	16	"	$4\frac{5}{8}$	"	30
	22	"	36	"	$18\frac{5}{6}$	"	40
	18	"	72	"	$\frac{2}{3}$	"	32
so ist die Summe	224	Zentn.	99	Pf.	$8\frac{5}{8}$	Lt.	$\frac{126}{48} = 2\frac{30}{48} \mid \frac{5}{8}$ L. (6)

Beispiele zur Uebung.

I. Wie viel Zentner Pulver hat man empfangen, als man für die Artillerie $60\frac{3}{4}$ Zentner, für die Infanterie $113\frac{1}{2}$ Zentner, und für die Cavallerie $19\frac{3}{8}$ Zentner, zur Manöverzeit, überließ? $193\frac{5}{8}$ Zentner.

II. Ein schwerer Körper fällt

in der ersten Secunde,		$15\frac{5}{8}$	rheinl.	Fuß.
" " zweiten	"	$46\frac{7}{8}$	"	"
" " dritten	"	$78\frac{1}{8}$	"	"
" " vierten	"	$109\frac{3}{8}$	"	"
" " fünften	"	$140\frac{5}{8}$	"	"
" " sechsten	"	$171\frac{7}{8}$	"	"

Wie tief also in sechs Secunden? $562\frac{1}{2}$ Fuß.

III. Auf dem Schloßthurme zu Dresdem wiegt die Fahne $1\frac{49}{220}$ Zentner, der Knopf $\frac{109}{110}$ Zentner, und die Spindel $6\frac{1}{2}$ Zentner. Wie viel wiegt die ganze Last dieses Aufsatzes? $8\frac{157}{220}$ Zentn.

IV. Daß unser Erdball schon große Revolutionen erfahren habe, wird unter andern auch daraus erweislich, daß man, so wie auf hohen Bergen, so auch in bedeutenden Tiefen deutliche Spuren findet, daß daselbst ehemals Meeresgrund gewesen sey. Von letzterm hatte man in Amsterdam ein Beispiel, wo man bei Gelegenheit eines

nes gegrabenen Brunnens folgende Erdschichten von oben hinab, antraf:

schwarze Gartenerde	—	$\frac{7}{10}$	Ruthe	tief.
Torf	—	$\frac{9}{10}$	"	"
weicher Thon	—	$\frac{9}{10}$	"	"
Sand	—	$\frac{4}{5}$	"	"
Gartenerde	—	$\frac{2}{5}$	"	"
Thon	1	—	"	"
Erde	—	$\frac{2}{5}$	"	"
Sand	1	—	"	"
Thon	—	$\frac{1}{5}$	"	"
weisser Sand	—	$\frac{2}{5}$	"	"
trockne Erde	—	$\frac{1}{2}$	"	"
Morast	—	$\frac{1}{10}$	"	"
Sand	1	$\frac{2}{5}$	"	"
Sand mit Lehm	—	$\frac{3}{10}$	"	"
Sand mit Thon	2	—	"	"
Thon	10	$\frac{1}{5}$	"	"
Sand mit Seemuscheln	—	$\frac{2}{5}$	"	"

Da diese Seemuscheln nun den ehemals vorhandenen Meeresgrund verrathen; wie tief war dieser unter der Oberfläche der Erde? $20\frac{1}{10}$ Ruthen.

IV. Subtraction.

Aufgabe.

§. 117. Benannte ganze Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung.

Dieses geschiehet eben so, wie bei den unbenannten Zahlen, nur daß man hier wieder die gleichartigen Theile unter einander setzt, und sie von einander abziehet. Z. B. Es sind 384 Thaler 19 gr. 4 pf. eingenommen, und 221 Thaler 22 gr. 8 Pf. ausgegeben worden; wie viel wird nun in Casse verbleiben?

	384 Thlr.	19 gr.	4 pf.,	davon
	221 "	22 "	8 "	abgezogen,
bleibt	162 Thlr.	20 gr.	8 pf.	Rest.

Hier soll man nun 8 pf. von 4 pf. wegnehmen; dieß kann nicht geschehen; man muß also (§. 24) eine Einheit, welche aber hier einen Groschen oder 12 pf. ausmacher, borgen; wenn man diese zu 4 pf. hinzuthut, so erhält man

 16 pf.,

16 pf., von welchen man nun 8 pf. abziehet, und den Rest von 8 pf. gehörig unter den Strich setzen kann.

Eben so verfährt man bei den noch übrig gebliebenen 18 gr., zu welchen man gleichfalls einen Thaler oder 24 gr. borgen muß; und nun wieder 22 gr. von diesen 42 gr. abgezogen, bleiben noch 20 gr. in Rest.

Zusatz.

§. 118. Das nämliche geschiehet bei Gewicht, Münzen, Zeitrechnung ꝛc. Wir wollen von dieser letztern Art noch ein Beispiel hinzufügen.

Es ist einer im Jahr 1754, den 20. September, geboren; wie alt wird er den 5. July 1810 sein? Man siehet, daß bis zum 5ten July 6 Monate 5 Tage, bis zum September aber, 8 Monat, 20 Tage verflossen sind; folglich kann man das Exempel folgendergestalt ansetzen:

1810	6 Mon.	5 Tage
1754	8 „	20 „
55 Jahr	9 Mon.	15 Tage.

Da man hier nicht 20 Tage von 5 Tagen abziehen kann, so borgt man einen Monat; hier 30 Tage, diese zu 5 Tagen addirt, geben 35 Tage; von diesen 20 Tage abgezogen, bleiben 15 Tage.

Bei den Monaten borgt man wieder ein Jahr oder 12 Monat, und verfährt übrigens wie vorhin.

Aufgabe.

§. 119. Benannte Zahlen, welche mit Brüchen vermischt sind, zu subtrahiren.

Auflösung.

Hier subtrahiret man vorher die Brüche, (§. 62.) und alsdann die ganzen Zahlen; z. B.

					20
					(20)
von	120 Zt.	16 Pf.	6 Lt.	$2\frac{2}{5}$ Qu.	8
sind abzuzieh.	30 „	98 „	12 „	$3\frac{3}{4}$ „	28
					15
bleibt	89 Zt.	27 Pf.	25 Lt.	$2\frac{13}{20}$ Qu.	$\frac{13}{20}$ Rest.

Bei

Beispiele zur Uebung.

I. Zu Verfertigung einer gewissen Menge Patronen erhält man: 1 Ballen 4 Rieß 16 Buch — Bogen. Man hat aber nur nöthig: 9 Rieß 18 Buch 15 Bogen, wieviel behält man übrig? 4 Rieß 17 Buch 9 Bogen.

II. Ein schwerer und freifallender Körper fällt:

in der	ersten Secunde	$15\frac{5}{8}$	rheinl.	Fuß.
= =	zweiten	= $46\frac{7}{8}$	=	=
= =	dritten	= $78\frac{1}{8}$	=	=
= =	vierten	= $109\frac{3}{8}$	=	=
= =	fünften	= $140\frac{5}{8}$	=	=
= =	sechsten	= $171\frac{7}{8}$	=	=

Um wieviel Fuß ist der Fall in jeder Secunde beschleunigter, als in der unmittelbar vorhergehenden? Um $31\frac{1}{4}$ Fuß in jeder Secunde.

III. Wenn, von der Sonne aus, eine Kanonenkugel nach den sieben Planeten abgeschossen würde, und diese ihre anfängliche Geschwindigkeit behalten könnte; so würde sie so viele Jahre nöthig haben, um auf denselben, bei ihren mittlern Abständen von der Sonne, anzukommen, als folgende Angaben betragen:

Mercur	$9\frac{26}{41}$	Jahr.
Venus	$18\frac{1}{455}$	=
Erde	$24\frac{25}{29}$	=
Mars	$37\frac{12}{13}$	=
Jupiter	$129\frac{14}{29}$	=
Saturn	$237\frac{14}{31}$	=
Uranus	$474\frac{31}{34}$	=

Um wieviel Jahre früher oder später als die Erde, wird die Kanonenkugel einen jeden der übrigen Planeten erreichen?

Mercur um	$15\frac{271}{1789}$	Jahr	früher.
Venus =	$6\frac{11346}{13195}$	=	=
Mars =	$13\frac{23}{377}$	=	später.
Jupiter =	$104\frac{18}{29}$	=	=
Saturn =	$212\frac{530}{899}$	=	=
Uranus =	$450\frac{42}{986}$	=	=

IV. Ein rheinl. Cubikfuß gemeiner trockner Sand wiegt $108\frac{1}{220}$ Pfund, wenn er aber mit Wasser ganz durch-

näßt

näßt ist, 128¾ Pf. Um wieviel ist sein Gewicht im letztern Falle vermehrt? Um $20\frac{27}{110}$ Pfund.

V. Multiplication.

§. 120. Die Multiplication der benannten Zahlen findet nur Statt, wenn der Multiplicator eine unbenannte Zahl ist; denn es ist von selbst klar, daß z. B. 6 Thaler etlichemal größer genommen, aber nicht mit 4 gr. multipliciret werden können, weil alsdann das Product weder 24 Thaler noch 24 gr. sein würde. Eben so wenig könnte man 6 Thaler mit 6 Thalern multipliciren.

Anmerkung.

In der Geometrie findet die Multiplication benannter Zahlen mit benannten Zahlen Statt; z. B. Längenmaas kann mit Längenmaase multipliciret werden; hier aber erhält das Product einen andern Namen und eine andere Bedeutung.

Die übrigen Fälle, wo man wissen will, wieviel eine gewisse Anzahl Zentner, Pfunde &c. kosten, wenn der Preis z. B. eines Pfundes bekannt ist, gehöret eigentlich in die Anwendung der geometrischen Proportionen.

Aufgabe.

§. 121. Benannte ganze Zahlen mit einer unbenannten ganzen Zahl zu multipliciren.

Auflösung.

Es kommen hier zwei Fälle vor; entweder die benannte Zahl ist einfach, oder, sie hat noch kleinere Einheiten bei sich.

Im ersten Falle multipliciret man selbige sogleich mit dem Multiplicator, im zweiten aber muß man die gegebene Zahl auf die kleinste Einheit bringen (§. 112.), selbige mit der gegebenen Zahl multipliciren, und die nun wieder gefundenen kleinern Einheiten wieder auf größere reduciren. Z. B.

23 Thlr. 8 gr. × 6
24
100
46
560 gr.
6
24 | 3360 gr. | 140 Thlr.
24
96
96
00

Da aber diese Methode ziemlich weitläuftig ist, so bedienet man sich folgender leichtern Methode:

18 Thlr. × 4 = 72 Thlr. u. 40 Ztn. × 3 = 120 Ztn.

auch

238 Thlr. 8 gr. 4 pf. × 6
1430 Thlr. 2 gr. — pf.

Hier nimmt man erstlich 4 pf. 6mal, wodurch man 24 pf. oder 2 gr., und also keinen Ueberrest von Pfennigen, erhält. Alsdann nimmt man 8 gr. 6mal, wodurch man 48 gr., und mit den vorigen 2 gr. 50 gr., welche aber 2 Thlr. 2 gr. ausmachen, erhält. Die übrig gebliebenen 2 gr. setzt man unter die Groschen, multipliciret nun 238 Thlr. durch 6, und addirt dazu 2 Thlr., wodurch man 1430 Thlr. erhält.

Anmerkung.

Manche Rechner bedienen sich des Vortheiles, den Multiplicator in Factoren zu zerlegen, um die Multiplication zu erleichtern. Bei obigem Exempel würde man den Multiplicator 6 in die beiden Factoren 3 × 2 verwandeln und die Multiplication, wie vorhin, verrichten.

238 Thlr. 8 gr. 4 pf. × 3
715 — 1 — • — × 2
1430 Thlr. 2 gr. • pf.

Aufgabe.

§. 122. Benannte Zahlen, welche Brüche bei sich haben, mit einer unbenannten Zahl zu multipliciren.

Auflösung.

Dieses ist sehr leicht, sobald man sich die Regeln der Bruchrechnung bekannt gemacht hat. Z. B.

12 Thlr. $13\frac{4}{5}$ gr. × 8
24

61
24

$301\frac{4}{5}$ gr.
5

1509

---

5 gr. × 8 $= \frac{12072}{5}$ gr. $= 2414\frac{2}{5} =$ 100 Thlr. $14\frac{2}{5}$ gr.

Nachdem man hier die Thaler zu Groschen gemacht, setzt man den vermischten Bruch, $301\frac{4}{5}$ gr., auf einen unächten, multiplicirt ihn mit 8, (§. 85.) sucht die ganzen Groschen durch die Division des Nenners 5, und alsdann die in selbigen enthaltenen Thaler. (§. 113.)

1. Zusatz.

§. 123. Um diese Weitläuftigkeit zu vermeiden, bedienet man sich auch folgender kürzern Art:

12 Thlr. $13\frac{4}{5}$ gr. × 8

---

100 Thlr. $14\frac{2}{5}$ gr.

Hier multiplicirt man erst $\frac{4}{5}$ mit 8, so bekommt man $\frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$ gr. Die $\frac{2}{5}$ gr. setzt man unter den Strich, multiplicirt die 13 gr. gleichfalls mit 8, und addirt obige 6 gr. dazu; die dadurch erhaltenen 110 gr. machen 4 Thlr. 14 gr. aus, welche letztere man unter den Strich setzt, die 4 Thlr. aber zu dem Producte der Thaler nimmt.

2. Zusatz.

§. 124. Bestehet der Multiplicator auch aus einem vermischten Bruche, so setzt man ihn auf einen unächten, und verfährt übrigens nach den §. 87. gegebenen Regeln. Z. B. 28 Zentn. $94\frac{3}{4}$ Pf. × $4\frac{1}{2}$

110

374
28

$3174\frac{3}{4}$
4

$\frac{12699}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{114291}{8} = 14286\frac{3}{8}$ Pf. = 129 Ztn. $96\frac{3}{8}$ Pf.

Beispiele zur Uebung.

I. Wenn der monatliche Sold eines Soldaten 2 Thlr. 12 gr. beträgt; wieviel macht dieses für eine Compagnie von

von 150 Soldaten und für ein Regiment zu 8 Compagnien jährlich? 36000 Thlr.

II. An ein Regiment werden 33 Zentn. 100 Pf. 16 Lt. Pulver geliefert und solches mit 1165 Thlr. 15 gr. 3 pf. vergütet; es ist nun die Frage, wieviel Pulver an 6 Regimenter ausgegeben, und was dafür überhaupt bezahlt worden sei? An alle Regimenter: 203 Ztn. 53 Pf., und dafür bezahlt: 6993 Thlr. 19 gr. 6 pf.

III. Ein Bund Stroh (von 20 Pf.) nimmt einen Raum von $5\frac{30}{41}$ rheinl. Cubikfuß ein. Wieviel Cubikfuß wird nun a) ein ganzes Schock, und wieviel b) ein Strohmagazin von 6645 Schock einnehmen?

a) $343\frac{37}{41}$ Cubikfuß.

b) $2285231\frac{20}{41}$ Cubikfuß = 1322 C. R. $815\frac{20}{41}$ C. F.

IV. Das Eis ist leichter als das Wasser; daher schwimmt es in den Flüssen. Es ist $\frac{11}{12}$mal so schwer. — Da nun 1 rheinl. Cubikfuß Flußwasser 66 Pf. 12 Lt. $2\frac{14}{15}$ Qt. schwer ist; wieviel wiegt ein rheinl. Cubikfuß Eis? 60 Pf. 27 Lt. $2\frac{31}{45}$ Qt.

V. Der Abstand des ersten Trabanten des Uranus von seinem Hauptplaneten beträgt $4\frac{25}{28}$; des zweiten $6\frac{11}{41}$; des dritten $8\frac{37}{49}$; des vierten $20\frac{13}{44}$ und des fünften $59\frac{2}{13}$ Halbmesser des Uranus. Da dieser Halbmesser nun $3723\frac{3}{37}$ geograph. Meilen enthält; wieviel betragen nun die Abstände derselben in geogr. Meilen?

des	ersten	$18216\frac{261}{518}$	Meilen.
"	zweiten	$23337\frac{549}{1517}$	"
"	dritten	$32595\frac{1731}{1813}$	"
"	vierten	$75561\frac{507}{814}$	"
"	fünften	$220234\frac{272}{481}$	"

VI. Division.

§. 125. Bei der Division der benannten Zahlen finden zwei Fälle Statt:

a) wenn eine benannte Zahl durch eine unbenannte,

b) wenn eine benannte Zahl wieder durch eine benannte Zahl dividiret werden soll.

Dieser zweite Fall war bei der Multiplication nicht möglich; hier aber findet derselbe Statt. Nur ist der Quotient

tient eine unbenannte Zahl; denn der Dividendus muß wieder herauskommen, wenn man den Divisor durch den Quotienten multipliciret. (§. 43.) Nun könnte aber diese Multiplication nicht geschehen, wenn der Quotient auch benannt wäre.

1. Fall. 9 Thlr. : 6 giebt zum Quotienten $1\frac{1}{2}$ Thlr.
2. Fall. 9 Thlr. : 6 " " " $1\frac{1}{2}$ "

Aufgabe.

§. 126. Benannte ganze Zahlen durch eine unbenannte ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung.

Ist die benannte Zahl einfach, so geschiehet es, wie im vorigen §. Hat sie aber noch kleinere Einheiten bei sich, so reduciret man sie vorher auf die kleinste Einheit, (§. 112.) nimmt dann die Division vor, und bringt den Quotienten wieder auf die größte Einheit. (§. 113.) Z. B. Es sollen 254 Thlr. 14 gr. 6 pf. in 8 Theile getheilet, d. i., durch 8 dividiret werden, so ist:

```
254 Thlr. 14 gr. 6 pf. : 8
 24
 ----
 1030
 508
 ----
 6110 gr.
 12
 -----
 12226
 611
 -----
 73326 pf.

8 | 73326 | 9165 pf. | 763 gr. | 31 Thlr. 19 gr. 9¾ pf.
    72      12)84        24)72
    --         --           --
    13         76           43
     8         72           24
    --         --           --
    52         45           19 gr.
    48         36
    --         --
    46         9 pf.
    40
    --
    6/8 = 3/4
```

Zusatz.

Zusatz.

§. 127. Da das so eben erklärte Verfahren aber ziemlich weitläuftig ist, so kann es auf folgende weit kürzere Art geschehen:

$$\begin{array}{l} \quad\; 6, \qquad\quad 6, \\ 8)\ \underline{254 \text{ Thlr. } 14 \text{ gr. } 6 \text{ pf. } : 8} \\ \quad\; 31 \text{ Thlr. } 19 \text{ gr. } 9\tfrac{3}{4} \text{ pf.} \end{array}$$

Hier dividiret man zuerst mit dem Divisor in 254 Thlr.; den Quotient 31 setze man unter den Strich; den Rest von 6 Thlrn. mache man aber zu Groschen, und nehme die 14 gr. dazu, so ist $6 \times 24 = 144 + 14$ gr. $= 158$ gr. Diese dividiret man wieder mit 8, so erhält man 19 gr. zum Quotienten, und 6 gr. zum Reste; diese in Pfennige verwandelt, macht $6 \times 12 + 6$ pf. $= 78$ pf. Diese wieder mit 8 dividirt, geben $9\frac{6}{8} = 9\frac{3}{4}$ pf.

Anmerkung.

Da man bei der Multiplication den Multiplicator in Factoren zerlegt, so kann man sich dieses Vortheiles auch bei der Division bedienen. Z. B.

$$\begin{array}{l} \quad\; \underline{254 \text{ Thlr. } 14 \text{ gr. } 6 \text{ pf.}} \\ 4)\ \underline{63 \;=\; 15 \;=\; 7\tfrac{1}{2} \;=} \\ 2)\ 31 \text{ Thlr. } 19 \text{ gr. } 9\tfrac{3}{4} \text{ pf.} \end{array}$$

Aufgabe.

§. 128. Benannte Zahlen mit Brüchen durch unbenannte Zahlen zu dividiren.

Auflösung.

Sind mit den benannten Zahlen auch Brüche verbunden, so kann man sie, wie bei vorigen Exempeln, auf die kleinste Einheit und den dadurch entstandenen vermischten Bruch auf einen unächten setzen, und alsdann, nach der bereits gegebenen Anleitung der Bruchrechnung, (§. 90.) dividiren, den Quotienten aber wieder auf die größern Einheiten reduciren. Z. B.

$$\begin{array}{l} 100 \text{ Thlr. } 14\tfrac{2}{5} \text{ gr. } : 8 \\ \underline{\quad 24 \quad} \\ 2414\tfrac{2}{5} \\ \underline{\quad\; 5 \quad} \\ \dfrac{12072}{5} : 8 = \dfrac{12072}{40} = 301\tfrac{23}{40}\big|\tfrac{4}{5}\ (8) \text{ gr.} = 12 \text{ Thlr. } 13\tfrac{4}{5} \text{ gr.} \end{array}$$

1. Zu-

1. Zusatz.

§. 129. Man könnte aber auch auf folgende Art verfahren. Z. B.

$$8)\ \frac{100\ \text{Thlr.}\ 14\tfrac{2}{5}\ \text{gr.}}{12\ \text{Thlr.}\ 13\tfrac{4}{5}\ \text{gr.}}$$

Man dividirt nämlich die Ganzen, wie bereits §. 127. gezeigt worden ist; die 6 gr., die bei den Groschen übrig bleiben, setzet man, um die $\tfrac{2}{5}$ dazu nehmen zu können, auf einen unächten Bruch, (§. 61.) welcher 5 zum Nenner hat, und so bekommt man $\tfrac{30}{5} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{32}{5}$ gr. Diese werden durch 8 dividirt, (§. 90.) und geben $\tfrac{32}{40} = \tfrac{4}{5}$ gr., wie oben.

2. Zusatz.

§. 130. Bestehet der Divisor aus einem Bruche oder aus einer vermischten Zahl, so setzt man letztere auf einen unächten Bruch, kehrt in beiden Fällen den Divisor um, und verfährt übrigens wie vorher. Z. B.

129 Zentn. $96\tfrac{3}{8}$ Pf. : $4\tfrac{1}{2}$.

```
 110
────
 1386
 129
────
14286 3/8 Pf.
    8
────
```

114291 Pf. $\times \tfrac{2}{9} = \tfrac{228582}{72} = 3174\tfrac{3}{4}$ Pf. $= 28$ Zt. $94\tfrac{3}{4}$ Pf.

8

Beispiele zur Uebung.

I. Das Licht gehet mit einer solchen Geschwindigkeit, daß es den Weg von der Sonne zur Erde, also 20630754 geogr. Meilen, in $487\tfrac{1}{2}$ Secunden zurücklegt. Wieviel Meilen also in einer Secunde? $42319\tfrac{161}{325}$ Meilen.

II. Vier und funfzig Mann erbeuten auf einem Wagen 1634 Thlr. $8\tfrac{3}{8}$ gr. Den Wagen und die Pferde verkaufen sie für 120 Thlr. 16 gr. 9 pf. Wieviel bekommt ein jeder zu seinem Antheile? 32 Thlr. $12\tfrac{3}{144}$ gr.

III. Der Mond legt, in einer Secunde, auf seiner Bahn um die Erde $\tfrac{4}{29}$, und die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne $4\tfrac{4}{37}$ geogr. Meilen zurück; wievielmal ist die Bewegung der Erde geschwinder, als die des Mondes? $29\tfrac{22}{37}$ mal.

IV. Ein Ponton von Kupfer wiegt 722 Pfund. Da nun 1 rheinl. Cubikfuß geschmiedetes Kupfer $585\tfrac{8}{19}$ Pfund wiegt,

wiegt, wieviel Cubikfuß und Cubikzoll Kupfer sind zu einem Ponton erforderlich? 1 Cubikfuß $403\frac{1391}{11123}$ Cubikzoll.

V. Die Erde ist keine vollkommen runde Kugel. Sie ist vielmehr unter den Polen eingedrückt. Bouguer fand den Durchmesser des Aequators $1723\frac{3}{10}$; und den Durchmesser der Axe $1714\frac{1}{25}$ geogr. Meilen.

a) Wie groß ist nun der Unterschied beider Durchmesser? und b) wie groß ist der Durchmesser der Erde im Durchschnitt genommen? a) $9\frac{33}{50}$ und b) $1718\frac{87}{100}$ Meilen.

Zweiter Abschnitt.

Von der allgemeinen Arithmetik (Algebra).

Erstes Kapitel.

Von den ersten Gründen der Buchstabenrechnung.

Erklärung.

§. 131. Die Buchstabenrechnung bedient sich der Buchstaben als einer Art Rechnungszeichen, die nur allgemeine Zeichen der Zahlen sind.

Jeder Buchstabe kann alle mögliche Zahlen bedeuten; nur muß bei einer Rechnung ein Buchstabe ein und dasselbe bedeuten.

Man nennt diese allgemeinen Rechnungszeichen algebraische Größen.

Die Wissenschaft also, welche lehret: aus bekannten oder gegebenen allgemeinen Größen andere unbekannte finden, wird die allgemeine Arithmetik (Algebra) genannt. Da nun unter diesen Größen auch Zahlen verstanden werden können, so schließt die allgemeine Arithmetik die gemeine in sich.

Den

Den Theil der allgemeinen Arithmetik, welcher die 4 Rechnungsarten mit allgemeinen Zeichen der Größen enthält, nennt man insbesondere die Buchstabenrechnung.

Willkührlicher Satz.

§. 132. Die Zeichen der unbestimmten Größen der allgemeinen Arithmetik sind die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabetes, und zwar die ersten: a, b, c, d u. s. w. für bekannte; die letztern hingegen, als: x, y, z, für unbekannte Größen.

Gleichartige Größen in einer und eben derselben Verbindung werden mit einerlei; ungleichartige hingegen mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet.

I. Bezeichnung der Größen.

Erklärungen.

§. 133. Um die Addition der allgemeinen Größen auszudrücken, bedienet man sich des Zeichens (+) (§. 19.) So zeigt z. B. $a+b$ eine Summe an. Soll eine Größe etlichemal genommen werden, so wird vor die Buchstaben eine Ziffer gesetzt, welche die Anzahl derselben ausdrückt, und der Coefficient genannt wird. Z. B. Anstatt $a+a+a$ setzt man $3a$, und so ist $4a+3a=7a$.

Das Zeichen der Subtraction hingegen ist (—). (§. 22.) So zeigt z. B. $a-b$ eine Differenz an, und $8a-3=5a$.

§. 134. Wenn Größen durch plus + oder minus — verbunden sind, so heißen sie zusammengesetzte, (complexe), wie $a+b-c$; im Gegentheile aber, einfache (einnamige oder monome) Größen, wie $+a$, oder $-c$. Die besonders ausgedrückten Theile der zusammengesetzten Größen werden Glieder genannt, und nach der Anzahl der Glieder nennt man

eine

eine zusammengesetzte Größe zweinamig (binomisch), wie a + b; dreinamig, (trinomisch), wie a + b + c u. s. w., überhaupt mehrnamig (multinomisch.

Anmerkung.

Bei den zusammengesetzten Größen ist es zwar einerlei, in welcher Ordnung sie auf einander folgen, wenn nur ihre Zeichen nicht verändert werden. Man ordnet sie aber gemeiniglich nach der Ordnung des Alphabetes.

§. 135. Soll die Multiplication einfacher Größen angezeigt werden, so werden die Buchstaben, entweder durch das Zeichen (×), oder durch einen Punkt (.), verbunden, aber, am gewöhnlichsten, ohne alles Zeichen an einander gesetzt. So zeigt $a \times b$ oder $a.b$, oder ab ein Product an.

Sind die Factoren zusammengesetzte Größen, so schließt man sie in Parenthesen ein. Z. B. Es soll $a + b - c$ mit $d + e - f$ multipliciret werden, so ist der Ausdruck des Productes $(a + b - c) \times (d + e - f)$. (§ 29.)

§. 136. Wird eine Größe etlichemal mit sich selbst multipliciret, so setzt man, anstatt den Factor etlichemal zu wiederholen, oben zur Rechten eine Ziffer, welche der Exponent heißt. Z. B. Anstatt aaa setzt man a^3. Man muß aber die Coefficienten und Exponenten wohl von einander unterscheiden und nicht mit einander verwechseln; bedeutet also z. B. $a = 5$, so ist $3a$ so viel als $a + a + a = 5 + 5 + 5 = 5 \times 3 = 15$, aber a^3 so viel als $a \times a \times a = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Den Coefficienten so wie den Exponenten 1 giebt man nie besonders an, nie schreibt man $1a^1$.

Anmerkung.

In der Lehre von den Potenzen wird davon weitläuftiger gehandelt werden, wo die Producte durch sich selbst andere Bedeutungen und Benennungen erhalten.

§. 137. Die Division der allgemeinen Größen wird entweder, und zwar am gewöhnlichsten, als ein Bruch,

Bruch, oder, durch zwei Puncte (:) angezeigt. (§. 34.) Z. B. a soll durch b dividiret werden, so ist der Ausdruck $\frac{a}{b}$ oder a : b.

Bei der Division zusammengesetzter Größen wird das nämliche, wie bei der Multiplication derselben, beobachtet, das ist, sie werden in Parenthese eingeschlossen. Z. B. a + bc — ac soll durch db — ad dividiret werden, so setzt man entweder: $\frac{a + bc - ac}{db - ad}$ oder $(a + bc - ac) : (db - ad)$.

§. 138. Größen, die aus einerlei Buchstaben und Exponenten bestehen, heißen: gleichartige, auch: ähnliche Größen; z. B. $a^3 + 3a^2 b - 2b^2$ und $2a^3 + a^2b - b^2$. Haben sie aber verschiedene Buchstaben oder Exponenten, so nennet man sie ungleichartig oder unähnlich.

II. Begriff der entgegengesetzten Größen.

Erklärungen.

§. 139. Größen werden entgegengesetzt genannt, wenn sie einander ganz, oder doch zum Theil aufheben. Z. B. Vermögen und Schulden, vorwärts und rückwärts gehen rc. Das, was man von den zwei entgegengesetzten Größen erhält, nachdem die eine so viel ist vermindert worden, als die Größe der andern angiebt, könnte man überhaupt das Resultat nennen; der Abkürzung wegen aber nennt man es: die Summe der entgegengesetzten Größen, wenn gleich diese Summe durch die Subtraction gefunden werden muß. Um die beiden entgegengesetzten Größen von einander zu unterscheiden, bezeichnet man die eine mit dem Zeichen (+), und nennt sie positiv, und die andere mit dem Zeichen (—), und nennt sie nega=

negativ. So kann vorwärtsgehen mit + bezeichnet und als positiv; rückwärtsgehen hingegen mit — bezeichnet und als negativ angesehen werden.

Eigentlich sind beide Größen für sich positive Größen; nur wegen der Beziehung auf einen festgesetzten Fall werden sie durch positiv und negativ von einander unterschieden. Stehet eine positive Größe allein, oder vom Anfange, so wird das Zeichen + gemeiniglich weggelassen.

§. 140. Gewöhnlich erläutert man den Begriff von den entgegengesetzten Größen durch Beispiele, die von dem gemeinen Begriffe Schuld und Vermögen hergenommen sind.

Vermögen wird alsdann mit +, und Schuld mit — bezeichnet; oder, Vermögen nennt man eine positive und Schuld eine negative Größe.

So ist z. B. + 40 Thlr. Vermögen eine positive, und — 10 Thlr. Schuld eine negative Größe.

Wer 40 Thlr. Vermögen und 40 Thlr. Schulden hat, hat eigentlich nichts, und wer 40 Thlr. Vermögen und 60 Thlr. Schulden hat, hat weniger als nichts. Wer hingegen 40 Thlr. Vermögen und 10 Thlr. Schulden hat, besitzt nur 30 Thlr. Vermögen, oder + 40 Thlr. — 10 Thlr. = + 30 Thlr. Auch — 40 Thlr. Vermögen und + 10 Thlr. Schulden betragen ebenfalls — 30 Thlr. Vermögen.

Hieraus siehet man ebenfalls, daß beide Größen, positive und negative, wirkliche Größen sind, und nur der Beziehung wegen einander entgegengesetzt sind; auch siehet man ferner, daß es nicht darauf ankommt, welche von den entgegengesetzten Größen mit + oder mit — bezeichnet wird.

Eine negative Größe heißt also weiter nichts, als eine Größe, die man als der positiven entgegengesetzt betrachtet, und dieses durch die Verneinung anzeigt.

Bayerische Staatsbibliothek München

1. Anmerkung.

Die Vorstellungsart der entgegengesetzten Größen durch Vermögen und Schuld, leitet jedoch immer noch auf zu eingeschränkte Begriffe. Der Natur des Begriffes angemessener, kann man sich entgegengesetzt am schicklichsten durch entgegengesetzte Richtungen erläutern. Man muß nur bei negativen Größen nicht immer an den Begriff der gemeinen Subtraction, und bei positiven nicht immer an den Begriff der gemeinen Addition denken. In dem gegenwärtigen Sinne soll + und — nichts als die Beziehung der Größen auf einander anzeigen, so wie vor- und rückwärtsgehen das Steigen und Fallen des Barometers rc.

Man gehet z. B. von einem Orte 100 Meilen vorwärts oder gegen Westen, und kommt 40 Meilen von Westen nach Osten wieder zurück. Wird nun gefragt, wie weit man von dem Orte, von welchem man ausgegangen, wirklich entfernt sei; so ist die Antwort: 60 Meilen, denn der sämmtlich zurückgelegte Weg ist zwar 100 + 40, also 140 Meilen, aber die Beantwortung der Frage bezieht sich auf die gegenwärtige Entfernung von dem Orte des Ausganges; daher vermindern die 40 Meilen rückwärts die 100 Meilen vorwärts, und folglich bleibt die Entfernung + 100 — 40 = + 60 Meilen. Ueberhaupt muß man sich gewöhnen, die Begriffe einer Lehre in einer Wissenschaft, mit den Begriffen einer andern Lehre in eben derselben Wissenschaft, nicht zu verwechseln, wenn sie auch einerlei Bezeichnung haben.

2. Anmerkung.

Ein mehreres hiervon findet man in Karstens Lehrbegriffe der gesamten Mathematik, 2r Theil, §. 17., und folglich der allgemeinen Arithmetik.

§. 141. Aus dem Vorhergehenden (§. 139. und 140.) haben wir gesehen, daß sich die positiven und negativen Größen gegenseitig aufheben. Größen mit verschiedenen Zeichen müssen sich daher entweder ganz, wenn sie gleich sind, oder nur zum Theil, wenn sie ungleich sind, aufheben. Z. B.

+ a	und — a	= 0;	eben so
+ 6 Thlr.	und — 6 Thlr.	= 0.	
+ 8a	und — 3a	= + 5a;	eben so
+ 8 Thlr.	und — 3 Thlr.	= + 5 Thlr.	
— 10a	und + 6a	= — 4a;	eben so
— 10 Thlr.	und + 6 Thlr.	= — 4 Thlr.	

Größen mit einerlei Zeichen müssen daher einander vermehren. Z. B.

+ 5a	und + 3a	= + 8a;	eben so
+ 5 Thlr.	und + 3 Thlr.	= + 8 Thlr.	
— 6a	und — 8a	= — 14a;	eben so
— 6 Thlr.	und — 8 Thlr.	= — 14 Thlr.	

Zwei-

Bayerische Staatsbibliothek München

Zweites Kapitel.
Von den vier Rechnungsarten der zusammengesetzten algebraischen Größen.

I. Addition.

Erklärung.

§. 142. Bei der Addition der algebraischen Größen hat man auf folgende Fälle Acht zu geben:

1) Haben gleichartige Größen einerlei Zeichen, so werden sie nach den gegebenen Begriffen der entgegengesetzten Größen (§. 141.) zusammengezogen.

2) Haben sie aber verschiedene Zeichen, so müssen sie von einander abgezogen, und dem Reste muß das Zeichen der größern Größe vorgesetzt werden. (§. 141.)

3) Sind die Größen und Coefficienten bei verschiedenen Zeichen gleich, so heben sie sich völlig auf. (§. 141.)

4) Sind die Größen ungleichartig, so werden sie mit unveränderten Zeichen an einander gesetzt.

Aufgabe.

§. 143. Algebraische Größen, sowohl einfache als zusammengesetzte, zu addiren.

Auflösung.

1) Die einfachen gleichartigen Größen werden, nach den im vorigen §. gegebenen Regeln, reducirt, die ungleichartigen aber unverändert an einander gesetzt.

2) Bei zusammengesetzten Größen setzt man die gleichartigen Größen untereinander, und stellt mit ihnen eine Reduction an. Das Resultat mit den dazu gehörigen Zeichen, setzt man, so wie die ungleichartigen, ungeändert unter den Strich.

Beispiele.

1) $6a$ und $+4a = 10a$; $-12bc$ und $-3bc = -15bc$.
2) $8bd$ und $-2bd = +6bd$; $-4bc$ und $+2bc = -2bc$.
3) $6a$ und $-6a = 0$.

 4) 3ab

4) $3ab$ und $-4cd = +3ab - 4cd$.

5)
$$\begin{array}{rrrrrr}
5a & +9b & -2c & +13d & -6x & -7y \\
3a & -2b & +6c & -5d & -5x & +5y \\
4a & +6b & -5c & -8d & -7x & -3y \\
6a & -4b & -3c & +8d & -x & +y \\
\hline
\text{Summe}\ 18a & +9b & -4c & +8d & -19x & -4y
\end{array}$$

Anmerkung.

Man siehet hieraus, daß die Addition eigentlich weiter nichts, als eine Abkürzung oder Reduction der Glieder ist.

Man kann sich dieselbe als eine Gegeneinanderhaltung der positiven und negativen Größen, oder der Einnahme und Ausgabe in einer Rechnung, vorstellen, wo es sich am Ende ausweist, ob man mehr Einnahme oder mehr Ausgabe gehabt hat.

Aufgabe.

§. 144. Algebraische gebrochene Größen zu addiren.

Auflösung.

Sollen algebraische gebrochene Größen addirt werden, so werden sie vorher (§. 73. u 74.) zu einerlei Benennung gebracht, und die Reduction wird, wie es die Zeichen erfordern, verrichtet. Z. B.

Es sind zu addiren: $\frac{3}{4}a - \frac{4}{5}b + \frac{6}{7}c$
und $\frac{1}{2}a - \frac{5}{7}b - \frac{3}{8}c$

so ist $\frac{5}{4}a - \frac{53}{35}b + \frac{27}{56}c$ die Summe.

II. Subtraction.

Erklärung.

§. 145. 1) Wenn eine positive algebraische Größe von einer andern abgezogen werden soll, so soll sie weggenommen werden, und folglich muß sich das Zeichen $+$ in $-$ verwandeln. Z. B $+b$ soll von $+a$ abgezogen werden, so ist der Ausdruck des Restes $a - b$ (§. 133.)

2) Sollen wir aber eine negative Größe von einer andern abziehen, so ist diese Operation das Gegentheil von der vorigen, und wir konnen uns dieselbe so vorstellen, als wenn wir einen Mangel von einem Cassenbestande wegnehmen sollten; aber, da wir einen Mangel

gel nicht anders wegnehmen können, als wenn wir dasjenige, was da mangelt, hinzuthun oder addiren, so folgt, daß wir die negativen Größen, welche abgezogen werden sollen, in positive, das heißt, — in + verwandeln müssen.

Z. B. von + a soll b — c weggenommen werden, so ist der Rest a — b + c.

Hieraus folgt die practische Regel: in der Subtraction die Zeichen im Subtrahendus umzukehren, das heißt, + in — und — in + zu verwandeln.

Aufgabe.

§. 146. Algebraische Größen, sowohl einfache als zusammengesetzte, zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Bei einfachen Größen verwandelt man die Zeichen im Subtrahendus, reducirt die gleichartigen Größen, und setzt dem Resultate das zukommende Zeichen vor. (§ 142.) Die ungleichartigen setzt man, mit veränderten Zeichen, im Minuendus neben einander.

2) Sind die Größen zusammengesetzt, so werden sie reihenweise unter einander gesetzt, die Zeichen im Subtrahendus ebenfalls verändert, die gleichartigen Größen reduciret, und das Resultat wird, mit dem zukommenden Zeichen (§. 142.), so wie die ungleichartigen, unverändert unter den Strich gesetzt.

Beispiele.

1) 3a von + 8a = 8a — 3a = 5a und
— 4b von — 6b = — 6b + 4b = — 2b

2) 4ac von — 6ac = —6ac — 4ac = — 10ac
— 4bd von + 12bd = 12bd + 4bd = 16bd

3) 7a von + 7a = 7a — 7a = 0.
— 5b von — 5b = — 5b + 5b = 0;

4) 4df von + 16abe = 16abc — 4df.
— cm von 8bm = 8bm + cm

5) Von 20a + 12bf — 3c + 5d — 3x
soll 16a + 18bf — 9c — 4d + 2y abgz. werd.
— — + + —

so ist der Rest 4a — 6bf + 6c + 9d — 3x — 2y.

An-

Anmerkung.

Aus diesem Beispiele siehet man, daß die Subtraction, wenn in selbiger die Zeichen verändert worden, eben so, wie die Addition, in einer Reduction der Größen bestehet, und daß man eigentlich nicht nöthig hätte, die Größen unter einander zu setzen.

Aufgabe.

§. 147. Algebraische gebrochene Größen zu subtrahiren.

Auflösung.

Bei der Subtraction mit gebrochenen Größen werden die Zeichen gleichfalls verändert, die Größen, wenn sie es noch nicht sind, zu einerlei Benennung gebracht, und die Reduction der gleichartigen Größen vorgenommen. Z. B.

von $\frac{8}{9}a + \frac{3}{7}b + \frac{5}{8}c - \frac{2}{5}d$ soll abgezogen
werden $\frac{7}{8}a - \frac{5}{6}b + \frac{4}{5}c - \frac{3}{8}e$
$\quad - \quad + \quad - \quad +$

so ist der Rest: $\frac{1}{72}a + \frac{53}{42}b - \frac{7}{40}c - \frac{2}{5}d + \frac{3}{8}e$.

III. Multiplication.

Erklärung.

§. 148. Bei der Multiplication mit Buchstaben hat man auf folgende Dinge Acht zu geben:

1) Was die Buchstaben betrifft, so werden solche in alphabetischer Ordnung, mit oder ohne Multiplicationszeichen, neben einander gesetzt. (§. 135.)

Z. B. a mit $a = a \times a = aa$
und a mit $b = a \times b = ab$.

2) Haben die Größen Coefficienten, so werden selbige multipliciret, und die Buchstaben, wie oben, zusammengesetzt. Z. B.

$3a$ mit $6bc = 3a \times 6bc = 18abc$.

3) Haben die Factoren gleiche Buchstaben, so werden die Buchstaben im Producte nur einmal geschrieben, und die Summe der Exponenten giebt den neuen Exponenten. Z. B.

$a \times a \times a = aaa = a^3$

und $a^3b \times a^2b^2 = a^5b^3$; denn $a^3b = aaab$ und $a^2b^2 = aabb$,

folgl. das Product $= aaaaabbb = a^5b^3$.

4) In Absicht der Zeichen ist zu merken, daß einerlei Zeichen das Product positiv, verschiedene aber dasselbe negativ machen.

a) Daß eine positive Größe, mit einer positiven multiplicirt, ein positives Product giebt, ist sehr einleuchtend. Z. B.

$+ 3a \times + 2b = 6ab$ oder

$+ 3$ Thl. $\times + 6 = 18$ Thlr.

b) Soll aber eine negative oder mangelnde Größe mit einer positiven oder wirklichen multiplicirt werden, so wird die negative wirklich so oft genommen, als die positive anzeigt; folglich ist das Product negativ. Z. B.

$- 6a \times + 3b = - 18\,ab$

oder $- 6$ Thl $\times + 4 = - 24$ Thlr.

c) Wird eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt, so soll dieselbe so oft genommen werden, als die andere anzeigt. Ist aber dieses, so muß das Product negativ ausfallen. Z. B.

$+ 4a \times - 7b = - 28ab$

oder $+ 6$ Thl $\times - 3 = - 18$ Thlr.

d) Soll endlich eine negative oder mangelnde Größe wieder mit einer negativen multipliciret werden, so heißt das so viel: Die erste soll so oft weggenommen werden, als die andere anzeigt; folglich muß dieser Mangel so oft ersetzt, und mithin das Product positiv werden. (§. 145.) Z. B.

$- 4a \times - 3a = + 12aa$

oder $- 4$ Thl. $\times - 3 = + 12$ Thlr.

Hat man dieses richtig gefaßt, so wird es nicht schwer werden, folgende Aufgaben aufzulösen.

Aufgabe.

§. 149. Algebraische, einfache sowohl als zusammengesetzte, Größen zu multipliciren.

Auflösung.

1) Sind die Größen einfach, so werden sie, nach den im vorigen §. gegebenen Regeln, multiplicirt.

2) Sind sie aber zusammengesetzt, so werden die Factoren, wie bei der gewöhnlichen Multiplication, unter einander gesetzt, jedes Glied des Multiplicators mit allen Gliedern des Multiplicandus multiplicirt und die einzelnen Producte reducirt.

Beispiele.

1) ac mit $+ b = abc$

$4a$ mit $+ 6b = 24ab$

2) $4ab$ mit $- 6ab = - 24a^2b^2$

$- 6ab$ mit $- 4cd = + 24abcd$

$- 3cm$ mit $+ 4dm = - 12cdm^2$.

Ferner:

3)

$$\begin{array}{ll} & a + b \\ \text{mit} & \quad\; c \\ \hline \text{giebt} & ac + bc \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{rrrr} & a + b & & \\ \text{mit} & c + d & & \\ \hline & ac + bc & & \\ & & + ad & + bd \\ \hline & ac + bc & + ad & + bd \end{array}$$

5)

$$\begin{array}{l} 3ab + 4b - 6c \\ 6ab - 3b \\ \hline 18a^2b^2 + 24ab^2 - 36abc \\ \qquad\quad - 9ab^2 - 12b^2 + 18bc \\ \hline 18a^2b^2 + 15ab^2 - 36abc - 12b^2 + 18bc \end{array}$$

6)

$$\begin{array}{l} 5a^2 - 3b^2 + 7cd \\ 3a^2 - 4b^2 \\ \hline 15a^4 - 9a^2b^2 + 21a^2cd \\ \qquad\quad - 20a^2b^2 + 12b^4 - 28b^2cd \\ \hline 15a^4 - 29a^2b^2 + 21a^2cd + 12b^4 - 28b^2cd. \end{array}$$

Auf-

Aufgabe.

§. 150. Gebrochene algebraische Größen zu multipliciren.

Auflösung.

Dieses geschiehet, wie bei den Zahlen. (§. 84—86.)

Z. B. $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$; $\frac{a}{c} \times \frac{e}{f} = \frac{ae}{cf}$

IV. Division.

Erklärung.

§. 151. Da die Division und Multiplication einander aufheben, so müssen bei der Division eben so, wie bei der Multiplication, 4 Regeln bemerkt werden.

1) Die Division der Buchstaben wird entweder durch das Divisionszeichen angezeigt;

z. B. a dividirt durch $b = \frac{a}{b}$

oder:

Da die Division und Multiplication einander aufheben (§. 41.), und man, durch die Division des Productes durch einen Factor, allezeit den andern zum Quotienten erhält; so kann man, wenn in dem Dividendus der Divisor als ein Factor erscheint, die Division wirklich verrichten, indem man beide ausstreicht, und im Quotienten wegläßt, die übrigen Buchstaben im Dividendus aber in den Quotienten setzt.

z. B. ab^2c dividirt durch $ab^2 = \frac{ab^2c}{ab^2} = c$

2) Haben der Dividendus und Divisor gemeinschaftliche Buchstaben mit verschiedenen Exponenten, so wird der Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividendus abgezogen. Z. B.

denn

$$a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$$

denn $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$

3) Die Coefficienten werden, wie gewöhnlich, dividirt, z. B.

$$18ab \text{ durch } 6a = \frac{18ab}{6a} = 3b$$

4) Da die Division eine Auflösung des Productes in seine Factoren ist, so gelten dieselben Regeln, wie bei der Multiplication, nämlich: Einerlei Zeichen machen den Quotienten positiv, verschiedene aber negativ. Z. B.

$$\frac{+16ab}{+8a} = +2b \text{ und } \frac{-24bc}{-8c} = 3b$$

Ferner:

$$\frac{+12bcd}{-4b} = -3cd \text{ und } \frac{-18ad}{+6ad} = -3$$

Aufgabe.

§. 152. Einfache und zusammengesetzte algebraische Größen zu dividiren.

Auflösung.

1) Die Division der einfachen Größen wird, nach vorigem §. No. 1., entweder durch das Divisionszeichen angezeiget, oder, durch Weglassung der gleichen Factoren, wirklich dividirt.

2) Sind die Größen zusammengesetzt, so ordnet man den Dividendus nach den Theilen des Divisors, sucht den ersten Theil des Quotienten nach den vorhin gegebenen Regeln, und multiplicirt denselben mit dem ganzen Divisor, setzt dieses Product mit umgekehrten Zeichen unter den Dividendus, stellt mit den Gliedern eine Reduction an und setzt die Operation mit den übrig gebliebenen Größen fort.

Beispiele.

1) abd durch $-bd = \frac{+abd}{-bd} = -a$;

2) $36a^2$ durch $18a = \frac{36a^2}{18a} = \frac{36}{18}\, a^{2-1} = 2a.$

3) $-12ab$ durch $4cd = \frac{-12ab}{+4cd} = -\frac{3ab}{cd}$

4) $8ab$ durch $-5cd = \frac{+8ab}{-5cd} = -\frac{8ab}{5cd}$

5) $-12ab$ durch $4ab = \frac{-12ab}{+4ab} = -3$

6) $c + d \mid ac + bc + ad + bd \mid a + b$

$$\begin{array}{l} -ac \qquad -ad \\ \hline +bc \qquad +bd \\ -bc \qquad -bd \\ \hline \ast \qquad\quad \ast \end{array}$$

Ferner: 7)

$6ab - 3b \mid 18a^2b^2 + 15ab^2 - 36abc - 12b^2 + 18bc \mid 3ab + 4b - 6c$

$$\begin{array}{l} -18a^2b^2 + 9ab^2 \\ \hline \ast \quad +24ab^2 - 36abc - 12b^2 + 18bc \\ \quad -24ab^2 \qquad\qquad +12b^2 \\ \hline \quad \ast \quad -36abc \quad \ast \quad +18bc \\ \qquad +36abc \qquad -18bc \\ \hline \qquad \ast \qquad\qquad \ast \end{array}$$

8)

$5a^2 - 3b^2 + 7cd \mid 15a^4 - 29a^2b^2 + 21a^2cd + 12b^4 - 28b^2cd \mid 3a^2 - 4b^2$

$$\begin{array}{l} -15a^4 + 9a^2b^2 - 21a^2cd \\ \hline \ast \; -20a^2b^2 \; \ast \quad +12b^4 - 28b^2cd \\ \quad +20a^2b^2 \qquad -12b^4 + 28b^2cd \\ \hline \quad \ast \qquad\quad \ast \qquad \ast \end{array}$$

Aufgabe.

§. 153. Gebrochene algebraische Größen zu dividiren.

Auflösung.

Bei der Division mit gebrochenen Größen wird eben so, wie bei den Zahlen, verfahren. (§. 88—92.) Z. B. $\frac{a}{b}$ soll durch $\frac{c}{d}$ dividiret werden, so ist $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$; denn $\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$, welches der vorige Dividendus ist.

Dritter Abschnitt.
Von den Potenzen und deren Wurzeln.

Erstes Kapitel.
Von den Potenzen, und Wurzeln, und den vier Rechnungsarten derselben überhaupt.

Erklärung.

§. 154. Jede Zahl oder Größe, wie sie auch beschaffen seyn mag, ist allezeit in der ersten Potenz. Wird solche mit sich selbst multipliciret; so entstehet die zweite Potenz, welche auch das Quadrat oder die Quadratzahl heißt. So ist 8 × 8 = 64 die Quadratzahl, oder das Quadrat, oder die zweite Potenz von 8. Multiplicirt man diese Zahl 64 wieder mit der ersten Potenz 8; so entstehet die dritte Potenz, oder der Cubus, oder die Cubikzahl. Z. B. 64 × 8 = 512. Die erste Potenz 8 bekommt aber den Namen Wurzel, (Stammgröße, Basis, Dimension), und zwar bei der zweiten Potenz oder dem Quadrate, heißt sie die Quadratwurzel, beim Cubus hingegen, die Cubikwurzel.

Auf diese Art entstehet die vierte Potenz, wenn man die dritte, die fünfte Potenz aber, wenn man die vierte mit der Wurzel multiplicirt, und so erhält man auch die sechste, siebente rc. Potenz.

Willkührlicher Satz.

§. 155. Man schreibt den Grad der Potenz, wie schon in der Buchstabenrechnung (§. 136.) gesagt worden ist, statt der gleichen Factoren, oben, rechter Hand, an die Wurzel, und nennt dieses Zahlzeichen

den

den Exponenten der Potenz, (Potenzenanzeiger). Z. B. a^2 statt aa; a^3 statt aaa. Ist die Wurzel eine zusammengesetzte Größe; so schließt man dieselbe in eine Parenthese, und setzt den Exponenten außerhalb. So schreibt man:

$(a+b+c)^3$ statt $(a+b+c) \times (a+b+c) \times (a+b+c)$

Anmerkung.

Die Benennung Quadratzahl ist aus der ebenen Geometrie, von der vierseitigen Figur, das Quadrat genannt, so wie die Benennung Cubikzahl aus der körperlichen Geometrie, von dem Körper, den man Würfel oder Cubus nennt, entlehnt. Die Quadratwurzel ist der Quadratzahl das, was die Seite des Quadrats dem Quadrate, und die Cubikwurzel der Cubikzahl das, was die Seite des Cubus dem Cubus ist.

Erklärung.

§. 156. Eine Größe zu einem gewissen Grade erheben, oder sie potenziren, heißt: dieselbe so vielmal mit sich selbst multipliciren, als der Exponent der Potenz Einheiten weniger Eins enthält. So ist:

$a \times a = aa = a^2$	die zweite Potenz	Quadrat
$a \times a \times a = aaa = a^3$	" dritte "	Cubus
$a \times a \times a \times a = aaaa = a^4$	" vierte " ꝛc.	Biquadrat

In Zahlen:

$4 \times 4 = 16$	die zweite Potenz.	Quadrat
$4 \times 4 \times 4 = 64$	" dritte "	Cubus
$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$	" vierte "	Biquadrat

Willkührlicher Satz.

§. 157. Um anzuzeigen, daß die Wurzel einer Größe genommen werden soll, bedient man sich des Zeichens $\sqrt{}$, welches, in einer veränderten Form, den Buchstaben r, als den Anfangsbuchstaben des Wortes radix, (Wurzel), anzeigt, in welches ein Zahlzeichen, das durch seine Einheiten den jedesmaligen Grad der Wurzel angiebt, gesetzt, und so vor die Größe geschrieben wird, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll. Von diesem Wurzelzeichen und dem darüber stehenden

Zahlzeichen erhalten die Wurzeln ihre Namen; daher man auch das Zahlzeichen den Exponenten der Wurzel nennt. Gemeiniglich läßt man den Exponenten in den Wurzelzeichen weg, wenn von der Wurzel der zweiten Potenz, oder von der Quadratwurzel, die Rede ist. Also bedeutet $\sqrt[2]{16}$ oder $\sqrt[2]{ab}$ die Quadratwurzel, $\sqrt[3]{81}$ oder $\sqrt[3]{df}$ die Cubikwurzel aus der unter dem Zeichen befindlichen Größe.

Erklärung.

§. 158. Die Wurzel eines gewissen Grades aus einer gegebenen Größe ziehen oder extrahiren, heißt, eine Zahl finden, welche, so vielmal mit sich selbst multipliciret, als der Exponent der Potenz Einheiten weniger Eins enthält, die gegebene Größe wieder giebt. So ist:

die Wurzel des zweiten Grades oder die Quadratwurzel aus $a^2 = a$, weil $aa = a^2$;

die Wurzel des dritten Grades oder die Cubikwurzel aus $a^3 = a$, weil $aaa = a^3$.

In Zahlen ist:

$\sqrt[2]{16} = 4$, weil $4 \times 4 = 4^2 = 16$.

$\sqrt[3]{216} = 6$, weil $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$.

Soll aus einer negativen Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist, eine Wurzel gezogen werden, so heißt sie eine unmögliche Wurzel. Denn

$-a \times -a = +a^2$; und $+a \times +a = +a^2$

Da es nun, außer positiven und negativen Wurzeln, keine weiter giebt, diese aber nicht dem Ausdrucke $-a^2$ entsprechen; so ist $\sqrt[2]{-a^2}$ unmöglich. Hingegen $-a \times -a = +a^2$, und $+a^2 \times -a = -a^3$ und folglich $\sqrt[3]{-a^3}$ möglich. Da nun $+a^2$ sowohl durch

$+a \times$

$+a \times +a$ als auch durch $-a \times -a$ entstehet; so drückt man die Wurzel durch $\pm a$ aus. Welche von beiden Wurzeln demnach in jedem gegebenen Falle anzunehmen ist, muß aus den übrigen Bestimmungen erhellen.

1. Zusatz.

§. 159. Ist die gegebene Größe ein Bruch, so ist die Quadrat- oder Cubikzahl desselben ebenfalls ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Quadrat- oder Cubikzahl von dem Zähler und Nenner der Wurzel ist. (§. 84)

So ist die Quadratzahl von $\frac{c}{a} = \frac{cc}{aa} = \frac{c^2}{a^2}$; von $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$; von $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4} = \frac{11 \times 11}{4 \times 4} = \frac{121}{16} = 7\frac{9}{16}$.

Eben so die Cubikzahl von $\frac{c}{a} = \frac{ccc}{aaa} = \frac{c^3}{a^3}$; von $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$; von $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4} = \frac{11 \times 11 \times 11}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1331}{64} = 20\frac{51}{64}$.

Ueberhaupt siehet man, daß jede Potenz eines ächten Bruches ein Bruch ist, der kleiner als die Wurzel ist, und daß diese Potenzen von Grad zu Grad abnehmen. Denn $(\frac{1}{2})^3 < (\frac{1}{2})^2$.

Umgekehrt ist die Quadrat- oder Cubikwurzel eines Bruches ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Quadrat- oder Cubikwurzel aus dem Zähler und Nenner der Potenz ist.

So ist $\sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$; $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1 \times 1}}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt[2]{7\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{\sqrt{11 \times 11}}{\sqrt{4 \times 4}} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Auch

Auch ist $\sqrt[3]{\frac{c}{a}} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{1\times1\times1}}{\sqrt[3]{2\times2\times2}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{20\frac{51}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1331}{64}} = \frac{\sqrt[3]{11\times11\times11}}{\sqrt[3]{4\times4\times4}} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.

2. Zusatz.

§. 160. Auch auf Decimalbrüche lassen sich diese Sätze anwenden. Denn man erhält:

1) die Quadratzahlen.

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0{,}1^2 = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$$
$$\left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0{,}01^2 = 0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{1000}\right)^2 = 0{,}001^2 = 0{,}001 \times 0{,}001 = 0{,}000001.$$

Umgekehrt, die Quadratwurzel.

$$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1 = \tfrac{1}{10}$$
$$\sqrt{0{,}0001} = 0{,}01 = \tfrac{1}{100}$$
$$\sqrt{0{,}000001} = 0{,}001 = \tfrac{1}{1000} \text{ u. s. w.}$$

2) die Cubikzahlen.

$$(\tfrac{1}{10})^3 = 0{,}1^2 \times 0{,}1 = 0{,}01 \times 0{,}1 = 0{,}001$$
$$(\tfrac{1}{100})^3 = 0{,}01^2 \times 0{,}01 = 0{,}0001 \times 0{,}01 = 0{,}000001$$
$$(\tfrac{1}{1000})^3 = 0{,}001^2 \times 0{,}001 = 0{,}000001 \times 0{,}001 = 0{,}000000001$$

u. s. w.

Umgekehrt, die Cubikwurzeln.

$$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1 = \tfrac{1}{10}$$
$$\sqrt[3]{0{,}000001} = 0{,}01 = \tfrac{1}{100}$$
$$\sqrt[3]{0{,}000000001} = 0{,}001 = \tfrac{1}{1000} \text{ u. s. w.}$$

Man

Man siehet, daß dieses mit den gegebenen Begriffen von den Decimalbrüchen und mit den Rechnungsarten derselben völlig übereinstimmt.

3. Zusatz.

§. 161. Ein Product wird zu einer gegebenen Potenz erhoben, wenn man jeden Factor zu der Potenz des verlangten Grades erhebt. So ist von ab die Quadratzahl = a^2b^2 von $\frac{ab}{cd} = \frac{a^2b^2}{c^2d^2}$; die Cubikzahl aber a^3b^3 und $\frac{a^3b^3}{c^3d^3}$. Umgekehrt, wird die Wurzel eines gegebenen Grades aus einem Producte extrahiret, wenn man dieselbe aus jedem seiner Factoren extrahiret, und die einzelnen Wurzeln multipliciret. So ist z. B. $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = ab$. Eben so $\sqrt[3]{a^3b^3} = \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{b^3} = ab$.

Da die Brüche auch eben so gut Quotienten vorstellen, so gilt dieser Satz auch für Quotienten.

4. Zusatz.

§. 162. Nach den allgemeinen Grundsätzen der Arithmetik müssen auch überhaupt alle Potenzen gleicher Grade von gleichen Größen oder Zahlen, und umgekehrt, alle Wurzeln gleicher Grade von gleichen Größen und Zahlen gleich sein. Von ungleichen Größen hingegen sind sie ungleich.

Erklärung.

§. 163. Dem Werthe der Wurzeln, der weder durch ganze Zahlen, noch durch Brüche, vollkommen genau angegeben werden kann, wie z. B. $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$ rc., kann man doch so nahe kommen, als es die Schärfe der Rechnung jedesmal verlangt. Allgemein siehet man, daß $\sqrt{2} > 1$ und < 2 sein muß; folglich hat man wenigstens an 1 und 2 ein paar Grenzen, zwischen welchen der wahre Werth der Quadratwurzel aus 2 enthalten ist.

Dergleichen Größen, wie die genannten Wurzeln, heißen überhaupt Irrationalgrößen, und bei Zahlen, Irrationalzahlen. Alle übrigen Größen oder

Zahlen aber heißen, im Gegensatze von jenen, Rationalgrößen oder Rationalzahlen. Eine Potenz heißt daher überhaupt eine vollkommne Potenz, wenn die Wurzel eines gegebenen Grades aus derselben rational, unvollkommen hingegen, wenn die Wurzel irrational ist. Daher giebt es vollkommene und unvollkommene Quadrat- und Cubikwurzeln.

Folgende Tafel enthält die rationalen Wurzeln von 1 bis 10, mit den dazu gehörigen Quadrat- und Cubikzahlen.

Wurzeln:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadratzahlen:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubikzahlen:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Anmerkung.

Eine und eben dieselbe Größe kann bald rational, bald irrational sein, je nachdem sie zu diesem oder jenem Wurzelexponenten gehört. So ist z. B. $\sqrt{4}$ rational, $\sqrt[3]{4}$ aber irrational, und umgekehrt, ist $\sqrt{8}$ irrational, $\sqrt[3]{8}$ aber rational.

Aufgabe.

§. 164. Potenzen zu addiren und zu subtrahiren.

Auflösung.

1) **Sind die Größen und Potenzen verschieden; so werden sie, nach §. 143. und 146., addirt und subtrahirt. Z. B. a^3 und $b^2 = a^3 + b^2$; b^3 und $- 2c^2 = b^3 - 2c^2$; a^6 und $a^4 = a^6 + a^4$. Eben so b^3 von $a^4 = a^4 - b^3$, $4a^3$ von $9a^5 = 9a^5 - 4a^3$.**

2) **Sind die Größen und Potenzen und ihre Exponenten gleich; so geschiehet die Addition und Subtraction, wie es §. 143. und 146., bei den gleichartigen Größen, gezeigt worden ist. Z. B. $4a^2$ und $6a^2 = 4a^2 + 6a^2 = 10a^2$; ferner $3a^3$ von $8a^3 = 8a^3 - 3a^3 = 5a^3$.**

Aufgabe.

§. 165. Potenzen zu multipliciren und zu dividiren.

Auf-

Auflösung.

1) Bei ungleichen Größen geschehen diese beiden Operationen blos durch die gewöhnlichen Zeichen (§. 149. und 152.). So ist a^4 multiplicirt mit $b^3 = a^4 b^3$. Eben so a^4 dividirt durch $d^3 = \frac{a^4}{d^3}$.

2) Sind die Größen gleich, so werden nach §. 148.

a) bei der Multiplication die Exponenten addirt. Z. B. $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$; denn $a^3 = aaa$ und $a^2 = aa$; folglich $aaaaa = a^5$.

b) bei der Division aber werden nach §. 151. die Exponenten subtrahirt. Z. B. $a^6 : a^3 = a^{6-3} = a^3$; denn $\frac{aaaaaa}{aaa} = aaa = a^3$.

Anmerkung.

Zusammengesetzte Potenzen werden ebenfalls addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, wobei man, außer den gegebenen Regeln, und den Regeln der Rechnungsarten im Allgemeinen, keine besondern nöthig hat.

Lehrsatz.

§. 166. Jede Potenz, deren Exponent 1, ist ihrer Wurzel gleich; jede Potenz aber, deren Exponent 0, ist der Einheit gleich; und jede Potenz, deren Exponent negativ ist, ist einem Bruche gleich, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner dieselbe Potenz mit dem positiven Exponenten ist.

Beweis.

$x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1$, und auch $x^3 : x^2 = \frac{xxx}{xx} = x$, also ist $x^1 = x$.

Ferner: $x^1 : x^1 = x^{1-1} = x^0$; aber auch $x^1 : x^1 = x : x = \frac{x}{x} = 1$; folglich $x^0 = 1$. Auch ist $x^2 : x^5 = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, denn $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1 \times xx}{xxxxx} = \frac{1}{x^3}$.

Desgleichen ist $x^{-n} = x^{0-n} = \frac{x^0}{x^n} = \frac{1}{x^n}$. (§. 160.)

 Anmer=

Anmerkung.

Aus der Lehre von den negativen Exponenten kann man die Lehre von den Decimalbrüchen herleiten, und überhaupt alle mögliche Zahlensysteme entwickeln.

Aufgabe.

§. 167. Eine Potenz von neuen auf eine Potenz von einem andern Exponenten zu erheben.

Auflösung.

Man multiplicire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem gegebenen neuen Exponenten; so ist das Product der Exponent der verlangten Potenz, welche mit der gegebenen einerlei Wurzel hat. So ist $(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6$; ferner $(b^4)^5 = b^{20}$ $(x^2 + y^3)^3 = x^6 y^9$. Allgemein $(x^m)^n = x^{mn}$. Denn $(a^3)^2 = a^3 \times u^3 = a^{3+3} = a^6$; und $(b^4)^5 = b^4 \times b^4 \times b^4 \times b^4 \times b^4 = b^{4+4+4+4+4} = b^{20}$; und $(x^2 \times y^3)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 \times y^3 \times y^3 \times y^3 = x^{2+2+2} \times y^{3+3+3} = x^6 \times y^9$.

Aufgabe.

§. 168. Die Wurzel von einem gegebenen Wurzelexponenten aus einer gegebenen Potenz zu ziehen.

Auflösung.

Hier dividiret man umgekehrt den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem verlangten Wurzelexponenten; so giebt der erhaltene Quotient den Exponenten der Potenz der gesuchten Wurzel. So ist $\sqrt{a^8} = a^{\frac{8}{2}} = a^4$; $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$; überhaupt $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Ferner $\sqrt[4]{a^2 b^8} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^8} = a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{8}{2}} = ab^4$.

1. Zusatz.

§. 169. Geht die Division nicht auf, so kann man den Exponenten als einen Bruch schreiben, wie bei den allgemeinen Formeln. Z. B.

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}; \quad \sqrt[7]{x^3} = x^{\frac{3}{7}}; \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Potenzen dieser Art werden Bruchpotenzen genannt.

2. Zu-

2. Zusatz.

§. 170. Wird aus einer Größe die Wurzel durch Vorsetzung des Wurzelzeichens extrahirt; so heißt der gesammte Ausdruck eine **Wurzelgröße**. Da nun aus allen vollkommenen Potenzen die verlangte Wurzel wirklich extrahirt werden kann; (§. 163.) so nennt man auch nur diejenigen Ausdrücke vorzugsweise **Wurzelgrößen**, welche keinen rationalen Werth in sich enthalten, als $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$; ferner $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{ab^2}$ rc. Wurzelgrößen haben **einerlei Benennung**, wenn sie gleiche Wurzelexponenten haben.

Anmerkung.

Die bisher vorgetragenen Lehren leiden allerdings eine größere Ausdehnung; aber zu unserm Zwecke werden sie hinreichend sein. Wer sich vollständig damit bekannt machen will, findet ausführlichern Unterricht in **Karstens**, **Kästners**, **Segners** und **Meinerts** Lehrbüchern.

Zweites Kapitel.

Von Erhebung der zusammengesetzten Größen zu Potenzen.

Lehrsatz.

§. 171. Die Quadratzahl einer zweitheiligen (binomischen) Wurzel $a+b$ bestehet:

1) aus der Quadratzahl des ersten Theiles a^2.
2) aus dem doppelten Producte beider Theile $2ab$, und endlich
3) aus dem Quadrate des zweiten Theiles b^2.

Beweis.

Um sich davon zu überzeugen, erhebe man sowohl eine binomische Größe, z. B. $a+b$, oder eine binomische Zahl, z. B. 26, welche man in zwei Theile $20+6$ zerlegen kann, wovon $a=20$ eine gewisse Anzahl **Zehner**, und $b=6$ eine gewisse Anzahl **Einer** anzeigt, zum Quadrate; so findet man die besagten Theile. Z. B.

$$\begin{array}{llll}
\text{Wurz.}\ a + b & = 20+6 & & \\
\phantom{\text{Wurz.}}\ a + b & = 20+6 & & \\
\hline
a^2 + ab & 20^2 + & 20\times 6 & = 400+120 \\
\quad + ab + b^2 & & 20\times 6 + 6^2 = & \quad +120+36 \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{a^2+2ab+b^2 = 20^2+2(20\times 6)+6^2 = 400+240+36.}
\end{array}$$

Auf

Auf die gewöhnliche Art:

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$ wie oben.

Lehrsatz.

§. 172. Die Cubikzahl einer zweitheiligen (binomischen) Wurzel $a + b$ bestehet:

1) aus der Cubikzahl des ersten Theiles a^3.
2) aus dem dreifachen Producte der Quadratzahl des ersten Theiles, und dem zweiten einfachen $3a^2 b$.
3) aus dem dreifachen Producte des ersten Theiles mit der Quadratzahl des zweiten Theiles $3ab^2$, und
4) aus der Cubikzahl des zweiten Theiles b^3.

Beweis.

Wenn wir die obige binomische Wurzel, $a + b = 20 + 6$, zur Cubikzahl erheben; so findet man die besagten Theile. Z. B.

$$\begin{array}{rlllll} \text{Wurzel} & a & + b & & & \\ & a & + b & & & \\ \hline & a^2 & + ab & & & \\ & & ab & + b^2 & & \\ \hline \text{Zweite Potenz} = & a^2 & + 2ab & + b^2 & & \\ & a & + b & & & \\ \hline & a^3 & + 2a^2 b & + ab^2 & & \\ & & a^2 b & + 2ab^2 & + b^3 & \\ \hline \text{Dritte Potenz} = & a^3 & + 3a^2 b & + 3ab^2 & + b^3. & \end{array}$$

In Zahlen:

$$\begin{array}{llll} 20 + 6 & & & \\ 20 + 6 & & & \\ \hline 20 + & 20 \times 6 & & = 400 + 120 \\ & 20 \times 6 + 6^2 & & + 120 + 36 \\ \hline 20^2 + 2(20 \times 6) + 6^2 & & & = 400 + 240 + 36 \\ 20 + 6 & & & \\ \hline 20^3 + 2(20^2 \times 6) + & 20 \times 6^2 & & = 8000 + 4800 + 720 \\ & 20 \times 6 + & (20 \times 6^2) + 6^3 = & 2400 + 1440 + 216 \\ \hline 20^3 + 3(20^2 \times 6) + & 3(20 \times 6^2) + 6^3 & & = 8000 + 7200 + 2160 + 216 = 17576 \end{array}$$

Auf

Auf die gewöhnliche Art:

$$\begin{array}{rr} \text{Wurzel} & 26 \\ & 26 \\ \hline & 156 \\ & 52 \\ \hline \text{Zweite Potenz} = & 676 \\ & 26 \\ \hline & 4056 \\ & 1352 \\ \hline \text{Dritte Potenz} = & 17576. \end{array}$$

1. Zusatz.

§. 173. Sind die beiden Größen durch die Subtraction verbunden; so erhält man die Formeln der Potenzen auf diese Art:

$$\begin{array}{lllllll} \text{Wurzel} & a & - & b & & & \\ & a & - & b & & & \\ \hline & a^2 & - & ab & & & \\ & & - & ab & + & b^2 & \\ \hline \text{Zweite Potenz} = & a^2 & - & 2ab & + & b^2 & \\ & a & - & b & & & \\ \hline & a^3 & - & 2a^2b & + & ab^2 & \\ & & - & a^2b & + & 2ab^2 & - b^3 \\ \hline \text{Dritte Potenz} = & a^3 & - & 3a^2b & + & 3ab^2 & - b^3. \end{array}$$

Und so bekömmt man auch die Formeln für die folgenden Potenzen, sowohl wenn sie durch die Addition, als wenn sie durch die Subtraction verbunden sind.

Vierte Potenz.

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ oder
$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Fünfte Potenz.

$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ oder
$a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ 2c.

2. Zusatz.

§. 174. Man siehet hieraus, daß die Exponenten von a, in jedem nachfolgenden Gliede, sich um eine Einheit verringern, von b hingegen, sich um eine Einheit vermehren. Die zu jedem Gliede gehörigen Coefficienten findet man allezeit aus dem vorhergehenden Gliede, indem man dessen

Coef-

Coefficienten mit dem Exponenten von a multiplicirt, und dieses Product durch die Stelle dieses Gliedes dividiret. Z. B. Es sollen die Coefficienten der fünften Potenz gefunden werden, so ist für das 2te Glied der Coefficient des vorhergehenden Gliedes hier 1, multiplicirt mit dem Exponenten von a hier $5 = 1 \times 5 = 5$, dieses Product dividirt durch die Stelle dieses Gliedes hier 1, also $\frac{5}{1} = 5 =$ dem Coefficienten des 2ten Gliedes.

Dem zufolge ist der Coefficient

des 3ten Gliedes $= \frac{5 \times 4}{2} = 10.$

des 4ten Gliedes $= \frac{10 \times 3}{3} = 10.$

des 5ten Gliedes $= \frac{10 \times 2}{4} = 5.$

des 6ten Gliedes $= \frac{5 \times 1}{5} = 0.$

3. Zusatz.

§. 175. Jede Potenz einer vieltheiligen (multinomischen) Größe kann man nach der Potenz einer zweitheiligen ordnen, wenn man die ersten Theile der vieltheiligen Größe als den ersten, den letzten aber als den zweiten Theil der zweitheiligen Größe annimmt. So ist:

I. $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$,

das ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$2(a + b)c = 2ac + 2bc$

$c^2 = c^2$

also $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$

II. $(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3c^2(a + b) + c^3$

das ist $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$3c(a + b)^2 = 3c(a^2 + 2ab + b^2) = 3a^2 c + 6abc + 3bc$

$3c^2(a + b) = 3c^2 a + 3c^2 b$

$c^3 = c^3$

also $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2 c + 6abc + 3b^2 c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3.$

Da, nach diesem Verfahren, alle Potenzen einer vieltheiligen Größe auf die Potenz einer zweitheiligen gebracht werden können; so hat man nur nöthig, sich mit der Natur und Zusammensetzung der Potenzen der zweitheiligen Größen bekannt zu machen.

Anmer-

Anmerkung.

In dem folgenden Kapitel werden wir uns, bei Gelegenheit der Ausziehung der Wurzeln, wenn solche aus mehr als zwei Zahlzeichen bestehen, auf diesen Zusatz beziehen.

Drittes Kapitel.

Von Ausziehung der Wurzeln aus zusammengesetzten Größen.

I. Ausziehung der Quadratwurzel.

Erklärung.

§. 176. Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Größe ausziehen, heißt, eine Größe finden, welche, mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Größe wieder giebt (§. 158.). Die gegebenen Größen sind entweder einfach, oder zusammengesetzt; allgemein, durch Buchstaben oder durch Zahlzeichen ausgedrückt.

Sind die gegebenen Größen einfach und allgemein bezeichnet; so wird die Quadratwurzel vermittelst des vorgesetzten Quadratwurzelzeichens ausgedrückt (§. 157.).

Sind aber die gegebenen Größen in Zahlen ausgedrückt, und bestehen nur aus einem, oder höchstens aus zwei Zahlzeichen; so findet man die denselben zugehörigen rationalen Quadratwurzeln, vermittelst der in §. 163. gegebenen Wurzeltafel, oder in Gedanken durch eine leichte Division. Folglich ist es nur nöthig, die durch Zahlen bezeichneten zusammengesetzten Größen aus mehr als zwei Zahlzeichen, genauer zu entwickeln, um daraus die Regeln für das Extrahiren der Quadratwurzeln zu finden, die keine andern sein können, als die dem Potenziren entgegengesetzten.

Zusatz.

§. 177. Da, nach §. 175., die Potenzen der vieltheiligen auf Potenzen zweitheiliger Größen gebracht werden können; so kann man sich, anstatt aller Regeln, bei dem Ausziehen der Quadratwurzel, der allgemeinen Formel für zweitheilige Größen, $a^2 + 2ab + b^2$, bedienen.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 178. Die vollkommene Quadratzahl einer jeden rationalen Wurzel bestehet wenigstens aus doppelt so vielen Zahlzeichen weniger Eins, als die Wurzel enthält, aber auch in keinem Falle aus mehr, als doppelt so vielen Zahlzeichen, als die Wurzel ausmachen.

Beweis.

Hierzu dienet folgende Tafel:

Das Quadr.	der kleinst. Zahl,	so aus 2 Zahlz. besteh.,	von 10	oder ist 100
•	größt.	• • • •	• 99	• 9801
•	kleinst.	• 3 • •	• 100	• 10000
•	größt.	• • • •	• 999	• 998001
•	kleinst.	• 4 • •	• 1000	• 1000000
•	größt.	• • • •	• 9999	• 99980001.

Bestehet also
eine Quadratz. aus 3 oder 4 Zahlz.; so hat ihre Wurzel 2 Zahlz.
• • • 5 • 6 • • • • • • 3 •
• • • 7 • 8 • • • • • • 4 •
u. s. w.

Aufgabe.

§. 179. Aus einer Rationalzahl, die aus 3 oder 4 Zahlzeichen bestehet, die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung und Beweis.

Es sei die Quadratzahl 676.

1) Man theile die gegebene Zahl, von der rechten gegen die linke, in Classen, und gebe jeder Classe zwei Zahlzeichen. In der ersten Classe kann auch nur eine Zahl stehen, weil dieselbe aus der Wurzel 1, 2 oder 3 bestehen kann. So viel nun die gegebene Zahl Classen hat, so viel Zahlzeichen enthält auch die dazu gehörige Wurzel (§. 178.) Zur Operation selbst bediene man sich der in §. 171. gegebenen sogenannten binomischen Regel; als:

$$a^2 + 2ab + b^2$$

	6	76	$20 = a$
$a^2 =$	4	00	$6 = b$
Rest $2ab + b^2 =$	2	76	$26 = a + b$
Divis. $(2a) =$		40	
multiplicirt mit $b =$		6	
$2ab =$	2	40	Diese Producte sind die
$b^2 =$		36	nämlichen, wie in §. 171.
$2ab + b^2 =$	2	76	
		• • •	

2) Das erste, was man aus dieser Quadratzahl hinwegnehmen muß, ist die Quadratzahl des ersten Theiles $= a^2$. Die nächste Quadratzahl zu 676 ist 400, davon die Wurzel $20 = a$ ist, welche man, wie bei der Division, an die Stelle des Quotienten setzt. Diese Quadratzahl von der gegebenen abgezogen, bleibt der Rest $276 = 2ab + b^2$.

3) Um nun den zweiten Theil $= b$ zu bekommen, bleibt kein anderer Weg übrig, als, nach §. 151., mit $2a$, als dem doppelten ersten Theile $= 40$ in diesen Rest zu dividiren, wo nun der gefundene Quotient $b = 6$ den zweiten Theil der Wurzel giebt.

4) Mit diesem gefundenen zweiten Theile $b = 6$, multiplicire man den Divisor $= 2a = 40$; so erhält man $2ab = 240$. Dieses Product setze man unter den Divisor.

5) Nun fehlt noch die Quadratzahl des zweiten Theiles der Wurzel $= b^2 = 36$, welche man unter die Einer des vorigen Productes setzt, die beiden zuletzt erhaltenen Theile der Quadratzahl addirt, und diese Summe von dem oben gebliebenen Reste der gegebenen Zahl subtrahirt, auch die beiden Theile der Wurzel addiret. $20 + 6 = 26 = a + b$.

Man siehet aber, daß diese einzelnen Producte völlig mit den in §. 171. gefundenen Producten übereinstimmen, und daß das, was dort zusammengesetzt wurde, hier wieder getrennt wird.

1. Zusatz.

§. 180. Eigentlich kann man aber diese Ausziehung etwas abkürzen, ohne daß die Richtigkeit der Rechnung leidet, indem man die Nullen im vorigen Beispiele wegläßt. Hierbei ist folgendes zu merken.

Man sucht die nächste Quadratzahl zu der in der ersten Classe stehenden Zahl, nach der gegebenen Wurzeltafel, (§. 163), subtrahirt solche, und rückt zu dem Reste die nächstfolgende Classe herunter. Der Divisor $4 = 2a$ wird so untergesetzt, daß die Einerstelle frei bleibt, und der gefundene zweite Theil $= 6 = b$ unter selbigen; beide mit einander multipliciret, giebt $24 = 2ab$. Endlich setzt man das Quadrat des zweiten Theiles $= 36 = b^2$ unter diese Einerstelle, addirt diese beiden gefundenen Theile $2ab + b^2$, so erhält man das Vorige. Z. B.

$a^2 +$

$a^2 + 2ab + b^2$

	6	7 6	a + b
$a^2 =$	4		2 6 die Wurzel.
Rest $2ab + b^2 =$	2	7 6	
Divis. (2a) =		(4) :	
b =		6 :	
Product 2ab =	2	4 :	
$b^2 =$		3 6	
$2ab + b^2 =$	2	7 6	
	.	. .	

2. Zusatz.

§. 181. Man kann aber diese Operation noch mehr abkürzen, wenn man den gefundenen zweiten Theil b, hier 6, gleich neben den Divisor setzt, und beide zusammen mit diesem zweiten Theile multipliciret; denn hier bekommt man das zwiefache Product und die Quadratzahl des zweiten Theiles auf einmal. Z. B.

$a^2 + 2ab + b^2$

	6	7 6	a + b
$a^2 =$	4		2 6
Rest $2ab + b^2 =$	2	7 6	
Divis. (2a) =		(4) 6	= b
$2ab + b^2 =$	2	7 6	
	.	. .	

Ferner:

			a + b
	5 6	2 5	7 5
$a^2 =$	4 9		
Rest $2ab + b^2 =$	7	2 5	
Divis. (2a) =	(1	4)	
b =		5	
Product 2ab =	7	0	
$b^2 =$		2 5	
$2ab + b^2 =$	7	2 5	
	.	. .	

Abge-

Abgekürzt:

$$a^2 + 2ab + b^2 \qquad a + b$$

	5 6	2 5	7 5
$a^2 =$	4 9		
$2ab + b^2 =$	7	2 5	
$(2a) =$	(1	4) 5	$= b$
$2ab + b^2 =$	7	2 5	
	·	· ·	

3. Zusatz.

§. 182. Bestehet die gegebene Zahl aus mehr als vier Zahlzeichen, so extrahire man, ohne auf die Anzahl der Classen Rücksicht zu nehmen, die ersten beiden Theile der Wurzel. Sind diese gefunden, so nehme man dieselben nach §. 175. als den ersten Theil an, rücke die folgende Classe zu dem gebliebenen Reste, und formire den Divisor von den bis dahin gefundenen Theilen der Wurzel wie vorher, und suche aufs neue den zweiten Theil der Wurzel. Z. B.

a) Nach der in §. 175. gegebenen Formel.

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \qquad a + b + c$$

	4 5	4 2	7 6	6 7 4
$a^2 =$	3 6			
$2ab + b^2 =$	9	4 2		
$(2a) =$	(1	2)		
$b =$		7		
$2ab =$	8	4		
$b^2 =$		4 9		
$2ab + b^2 =$	8	8 9		
$2(a+b)c + c^2 =$		5 3	7 6	
$2(a+b) =$		1 3	4	
$c =$			4	
$2(a+b)c =$		5 3	6	
$c^2 =$			1 6	
$2(a+b)c + c^2 =$		5 3	7 6	
		· ·	· ·	

b) Nach

b) Nach der gewöhnlichen binomischen Regel.

$a^2 + 2ab + b^2.$ $\overset{a}{\overbrace{a + b} + b}$

	45	42	76	6 7 4.
$a^2 =$	36			
$2ab + b^2 =$	9	42		
$(2a) =$	(1	2)		
$b =$		7		
$2ab =$	8	4		
$b^2 =$		49		
$2ab + b^2 =$	8	89		
$2ab + b^2 =$		53	76	
$(2a) =$		13	4	
$b =$			4	
$2ab =$		53	6	
$b^2 =$			16	
$2ab + b^2 =$		53	76	
		..	..	

4. Zusatz.

§. 183. Ist die gegebene Zahl 1 mit einer geraden Anzahl Nullen; so ist die Wurzel 1 mit halb so viel Nullen. Z. B.

1	00	00	00	1000
1				
.	..	..	..	

5. Zusatz.

§. 184. Ist der Divisor größer als der gebliebene Rest + der dazu gesetzten Classe, so ist der neue Theil der Wurzel 0. Diese Null setzt man in die Stelle der Wurzel, rückt aufs neue eine Classe hinzu, macht den Divisor, und verfährt übrigens, wie vorhin. Z. B.

$a^2 + 2ab + b^2$ $\overset{a}{\overbrace{a + b} + b}$

	9	1 2	0 4	3 0 2.
$a^2 =$	9			
$2ab + b^2 =$		1 2		
$(2a) =$		(6) 0		
		1 2	0 4	
$(2a) =$		6	0 2 $= b$	
$2ab + b =$		1 2	0 4	
		. .	. .	

6. Zusatz.

§. 185. Bleibt ein Rest, so muß derselbe kleiner sein, als die doppelt bis dahin gefundene Wurzel um Eins vermehrt.

Ist der Rest größer, so ist es ein Beweis, daß man den Theil der Wurzel, bei welcher dieser Rest bleibt, zu klein genommen habe; denn wenn die Quadratwurzel einer Zahl um Eins vermehrt wird; so wächst die Quadratzahl um die doppelte vorige Wurzel + Eins. Z. B. $8^2 = 64$ und $9^2 = 81$; nun ist $81 - 64 = 17$ und 2 mal $8 + 1 = 17$.

Will man sich überzeugen, ob die ganze Rechnung richtig sei, so quadrirt man die gefundene Wurzel, und addiret dazu den übrig gebliebenen Rest; so muß die gegebene Quadratzahl wieder herauskommen. Z. B.

2	8 5	4 6	168
1			
1	8 5		
	(2)6		
1	5 6		
	2 9	4 6	
	(3	2)8	
	2 6	2 4	
	3	2 2 Rest.	

Probe.

Nun ist die Wurzel 168
168
1344
1008
168
28224
322 Rest
28546, welches mit der gegebenen Zahl einerlei ist.

Aufgabe.

§. 186. Aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel zu finden.

Auf-

Auflösung.

1) Dieses geschiehet, wenn man, sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner, die Quadratwurzel extrahiret. (§. 159.) Z. B. so ist $\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2) Ist der Nenner eine unvollkommene Quadratzahl, so multipliciret man Zähler und Nenner mit dem Nenner, und extrahiret aus beiden die Quadratwurzel; so erhält man die Quadratwurzel aus dem Nenner vollkommen. So ist z. B. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ welches man Extraction mit Rationalmachung des Nenners nennt.

Anmerkung.

Das ganze Verfahren nennt man eine Radicaloperation.

1. Zusatz.

§. 187. Ist der gegebene Bruch ein Decimalbruch, so extrahiret man die Quadratwurzel,

1) wenn die Anzahl der Decimalstellen gerade ist, wie aus einer ganzen Zahl, aus dem Zähler, und giebt der Wurzel halb so viele Decimalstellen als dieser Zähler hat. Z. B. $\sqrt{0,454276} = 0,674$; denn es ist $\sqrt{0,454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} = \frac{674}{1000} = 0,674$.

2) Ist die Anzahl der Decimalstellen ungerade, so fügt man noch eine Null hinzu, ohne daß der Werth geändert wird. (§. 95.) Z. B. $\sqrt{0,828} = \sqrt{0,8280} = \frac{\sqrt{8280}}{\sqrt{10000}} = \frac{90}{100} = 0,9 +$ einen Theil $< \frac{1}{10}$.

2. Zusatz.

§. 188. Gemeine Brüche, besonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Quadratzahlen sind, könnte man auch in Decimalbrüche verwandeln, (§. 104.) und aus denselben

selben die Quadratwurzel, nach §. 187., extrahiren. Z. B. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{0{,}333\ldots\ldots}$, (§. 104.)

0,	3 3	3 3	3 3	0,577 ....
	2 5			
	8	3 3		
	(1	0) 7		
	7	4 9		
		8 4	3 3	
		(1 1	4) 7	
		8 0	2 9	
		4	0 4	

3. Zusatz.

§. 189. Ist er ein gemischter Bruch, so verwandelt man ihn in einen unächten Bruch, (§. 61.) und extrahirt die Wurzel, (§. 186.) oder, man verwandelt ihn in einen Decimalbruch, (§. 104.) und extrahirt die Quadratwurzel. (§. 188.) Z. B. $\sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{25}{8}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$; $\sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Ferner $\sqrt{2\frac{1}{3}} = \sqrt{2{,}3\ldots} = \sqrt{2{,}30\ldots} = 1{,}5\ldots$

Eben so verfährt man auch mit den ursprünglichen Decimalbrüchen. Z. B. $\sqrt{4{,}25} = 2{,}5$; $\sqrt{3{,}4} = \sqrt{3{,}40} = 1{,}8\ldots\ldots$

Aufgabe.

§. 190. Aus einer unvollkommenen Quadratzahl die Wurzel durch Annäherung so genau zu finden, als verlangt wird.

Auflösung.

1) Man verwandele die gegebene Zahl in einen Decimalbruch, der zum Nenner eine Rationalquadratzahl hat, oder, welches einerlei ist, man füge derselben eine beliebige Anzahl Classen, jede zu 2 Nullen, bei.

2) Ist die Anzahl der Decimalstellen in der Wurzel vorgeschrieben; so füge man der Quadratzahl eben so viel Classen Nullen bei.

3) Nun extrahire man die Quadratwurzel, wie aus einer ganzen Zahl, und schneide von derselben, von der rechten gegen die linke Hand, halb so viel Decimalstellen ab, als der gegebenen Zahl Nullen beigefügt sind; (§. 178.) so bekommt man, außer dem Ganzen, noch Zehn-Hunderttheile ꝛc. Z. B. Es sei aus der Zahl 7 die Quadratwurzel zu ziehen; so ist $\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7000000}{1000000}}$ (§. 60. 64. und 189.) $= \frac{\sqrt{7000000}}{\sqrt{100,00,00}} = \frac{\sqrt{7000000}}{1000}$.

Und

7	00	00	00	$\frac{2645}{1000} = 2\frac{645}{1000} = 2,645.$
4				
3	00			
	46			
2	76			
	24	00		
	5	24		
	20	96		
	3	04	00	
		52	85	
	2	64	25	
		39	75	.....

Z u s a ß.

§. 191. Man siehet, daß man diese Nullen auch erst während des Extrahirens, paar- oder classenweise, beifügen, und die Ganzen in der Wurzel durch das Komma absondern darf. Z. B.

7				2,645
4				
3	00			
	46			
2	76			
	24	00		
	5,	24		
	20	96		
	3	04	00	
		52	85	
	2	66	25	
		39	75	

Anmer-

Anmerkung.

Da nun dieses Verfahren ohne Ende fortgesetzt werden kann, ohne daß die Wurzel vollkommen genau gefunden wird; so folgt, daß man dem wahren Werthe nur näher kömmt, ja so nahe kommen kann, als verlangt wird. Das, was hier von der Ausziehung der Quadratwurzel gesagt worden ist, wird hoffentlich für den Zweck dieses Lehrbuches hinlänglich sein.

II. Ausziehung der Cubikwurzel.

Erklärung.

§. 192. Die Cubikwurzel aus einer gegebenen Größe extrahiren, heißt, eine Größe finden, welche, mit ihrem Quadrate multiplicirt, die gegebene Größe wieder giebt. (§. 158.) Die Wurzeltafel (§. 163.) enthält die Cubikwurzeln für diejenigen vollkommenen Cubikzahlen, die nicht mehr als drei Zahlzeichen haben.

Anmerkung.

Da die Ausziehung der Cubikwurzeln alle Aehnlichkeit mit der Ausziehung der Quadratwurzeln hat; so gelten auch hier alle in §. 186 angeführten Bemerkungen, nur mit der gehörigen Anwendung auf die Eigenschaften der Cubikzahlen.

Lehrsatz.

§. 193. Die vollkommene Cubikzahl einer rationalen Wurzel bestehet wenigstens aus dreimal so vielen Zahlzeichen weniger zwei, als die Wurzel enthält, aber auch in keinem Falle aus mehr als dreimal so vielen Zahlzeichen, als die Wurzel ausmachen.

Beweis.

Hierzu dient folgende Tafel:

Die	der		so aus		oder
Cubikz.	kleinst. Zahl,	2	Zahlz. best.,	von 10	ist 1000
-	größten	-	-	- 99	- 970299
-	kleinsten	3	-	- 100	- 1000000
-	größten	-	-	- 999	- 997002999
-	kleinsten	4	-	1000	- 1000000000
-	größten	-	-	9999	- 999700029999

Besteht also		so hat
eine Cubikz. aus 4 oder 6 Zahlzeich.,		ihre Wurzel 2 Zahlzeichen.
" " " 7 " 9	" "	" 3 "
" " " 10 " 12	" "	" 4 " u. s. w.

Aufgabe.

§. 194. Aus einer Rationalzahl, die aus 4 bis 6 Ziffern besteht, die Cubikwurzel zu finden.

Auflösung.

Es sei die Cubikzahl 17576.

1) Man theile die gegebene Zahl, von der rechten gegen die linke, in Classen, und gebe jeder Classe 3 Zahlzeichen. In der ersten Classe kann auch nur ein oder zwei Zahlzeichen stehen, weil diese Zahl aus der Wurzel 1, 2, 3 oder 4 entstanden sein kann. So viel nun die gegebene Zahl Classen hat, so viele einzelne Zahlzeichen enthält die dazu gehörige Wurzel. (§. 193.)

Zu leichterer Uebersicht der Operation bediene man sich der in §. 172. gegebenen binomischen Regel:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

17 | 576 | 20 = a
a^3 = 8 | 000 | 6 = b
Rest $3a^2b+3ab^2+b^3$ = 9 | 576 | 26 = a + b
Divis. $(3a^2)$ = 1 | 200
b = | 6

$3a^2b$ = 7 | 200
$3ab^2$ = 2 | 160
b^3 = | 216

$3a^2b+3ab^2+b^3$ = 9 | 576
" | " " "

Diese Producte sind die nämlichen, wie in §. 167.

$a^2 = 400$
3   3
$3a^2 = 1200$

$b^2 = 36$
$3a = 60$
$3ab^2 = 2160$

$b = 6$
$b = 6$
$b^2 = 36$
$b = 6$
$b^3 = 216$

2) Das

2) Das erste, was man aus dieser Cubikzahl wegnehmen muß, ist die Cubikzahl des ersten Theiles $= a^3$, die nächst kleinere Cubikzahl zu 17576 ist 8000, davon die Wurzel $20 = a$ ist, welche man ebenfalls an die Stelle des Quotienten setzt; die Cubikzahl von der gegebenen abgezogen, bleibt der Rest $9576 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

3) Um nun den zweiten Theil $= b$ zu bekommen, formire man den Divisor, welcher die dreifache Quadratzahl der gefundenen Wurzel $= 3a^2 = 1200$ ist, um den zweiten Theil $b = 6$ (§. 151.) durch die Division in diesen Rest zu finden.

4) Mit diesem gefundenen zweiten Theile $b = 6$ multiplicire man den Divisor $3a^2 = 1200$, so erhält man $3a^2b = 7200$, und setze dieses Product unter den Divisor. Ferner suche man das dreifache Product des ersten Theiles mit der Quadratzahl des zweiten Theiles $= 3ab^2 = 2160$, und setze es unter das vorige. Endlich setze man auch die Cubikzahl des zweiten Theiles der Wurzel $= b^3 = 216$ unter die Einer des vorigen Productes.

5) Diese gefundenen Producte, welche mit denen in §. 172. völlig übereinstimmen, addire man, subtrahire die Summe von dem gebliebenen Reste der gegebenen Zahl, und addire die beiden Theile der Wurzel $20 + 6 = 26 = a + b$.

1. Zusatz.

§. 195. Man kann hier ebenfalls, um die Rechnung abzukürzen, wie in §. 180., die Nullen weglassen; man rückt nämlich zu dem gebliebenen Reste die folgende Classe herunter, und setzt den Divisor $= 12 = 3a^2$ dergestalt unter, daß zwei Stellen zur rechten frei bleiben, den zweiten Theil der Wurzel $6 = b$ unter selbigen, um das Product $3a^2b = 72$ zu finden. Das Product $216 = 3ab^2$, wird wieder um eine Stelle, eben so wie der Cubus des zweiten Theiles $216 = b^3$, herausgerückt, und diese einzelnen Producte werden addiret. Das übrige ist, wie vorhin. Z. B.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

			$a + b$
	17	576	2 6
$a^3 =$	8		
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	9	576	
Divis. $(3a^2) =$	(1	2)	
$b =$		6	
$3a^2b =$	7	2	
$3ab^2 =$	2	16	
$b^3 =$		216	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	9	576	
	.	. . .	

2. Zusatz.

§. 196. Bestehet die gegebene Zahl aus mehr als 4 bis 6 Zahlzeichen; so extrahire man, ohne auf die Anzahl der Classen Rücksicht zu nehmen, die ersten beiden Theile der Wurzel. Sind diese gefunden, so nehme man dieselben, nach §. 175., als den ersten Theil an, rücke die folgende Classe zu dem gebliebenen Reste, formire den Divisor von den bis daher gefundenen Theilen der Wurzel, wie vorhin, und suche aufs neue den zweiten Theil der Wurzel. Z. B.

a) Nach der in §. 175. gegebenen Formel:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$

				$a+b+c$
	432	081	216	7 5 6
$a^3 =$	343			
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	89	081		
$(3a^2) =$	(14	7)		
$3a^2b =$	73	5		
$3ab^2 =$	5	25		
$b^3 =$		125		
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	78	875		
	10	206	216	
$3(a+b)^2 =$	1	687	5	
$3(a+b)^2c =$	10	125	0	
$3(a+b)c^2 =$		81	00	
$c^3 =$			216	
$3(a+b)^2 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)^2c + c^3 =$	10	206	216	
	: :	: : :	: : :	

b) Nach

b) Nach der gewöhnlichen binomischen Regel:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

					$a+b+b$
		432	081	216	756
a^3	=	343			$\underbrace{75}_{a}$
		89	081		
Divis. ($3a^2$)	=	(14	7)		
$3a^2b$	=	73	5		
$3ab^2$	=	5	25		
b^3	=		125		
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=	78	875		
		10	206	216	
Divis. ($3a^2$)	=	(1	687	5)	
$3a^2b$	=	10	125	0	
$3ab^2$	=		81	00	
b^3	=			216	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=	10	206	216	
		..	...	...	

3. Zusatz.

§. 197. Ist die gegebene Zahl 1 mit einer durch 3 theilbaren Anzahl Nullen; so ist die Wurzel 1 mit dem dritten Theile der Anzahl Nullen. Z. B.

1	000	000	000	1000
1				
.	...	...	...	

4. Zusatz.

§. 198. Ist der Divisor größer als der gebliebene Rest + der dazu gesetzten Classe; so ist der neue Theil der Wurzel 0. Diese Null setzt man an die Stelle der Wurzel, rückt aufs neue eine Classe hinzu, macht den Divisor, und verfährt übrigens wie vorhin. Z. B.

$a^3 +$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

					a, a+b+b
		27	543	608	3 0 2
a^3	=	27			
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=	..	543		
$(3a^2)$	=	(2	7)		
			543	608	
$(3a^2)$	=		270	0	
$3a^2b$	=		540	0	
$3ab^2$	=		3	60	
b^3	=			8	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=		543	608	
			...	...	

5. Zusatz.

§. 199. Bleibt ein Rest, so muß derselbe kleiner sein, als die dreifache Summe der bis dahin gefundenen Wurzel und ihrer Quadratzahl um Eins vermehrt. Auf diese Art kann man ebenfalls die Richtigkeit der Cubikwurzel untersuchen; denn, wenn die Cubikwurzel einer Zahl um Eins vermehrt wird; so wächst die Cubikzahl um die dreifache Summe der vorigen Wurzel und ihrer Quadratzahl Eins.

Z. B. $4^3 = 64$, und $5^3 = 125$; nun ist $125 - 64 = 61$, und $(16+4)\,3 = 60 + 1 = 61$.

Will man sich überzeugen, ob die ganze Rechnung richtig sei, so cubirt man die gefundene Wurzel, und addiret dazu den übrig gebliebenen Rest; so muß die gegebene Cubikzahl wieder herauskommen. Z. B.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

				a+b
		3	690	1 5
a^3	=	1		
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=	2	690	
$(3a^2)$	=		3	
$3a^2b$	=	1	5	
$3ab^2$	=		75	
b^3	=		125	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=	2	375	
			315 Rest.	

Probe:

Probe:

$$\begin{array}{r} \text{Die Wurzel ist } 15 \\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \\ 15 \\ \hline 1125 \\ 225 \\ \hline 3375 \\ 315 \text{ Rest.} \\ \hline 3690 \end{array}$$

welche mit der gegebenen Zahl einerlei ist.

Aufgabe.

§. 200. Aus einem gegebenen Bruche die Cubikwurzel zu finden.

Auflösung.

1) Dieses geschiehet, wenn man, sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner, die Cubikwurzel extrahiret. (§. 159.)

Z. B. so ist $\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}$ rc.

2) Ist der Nenner aber eine unvollkommene Cubikzahl, so multiplicire man den Zähler und den Nenner desselben mit der Quadratzahl dieses Nenners, so erhält man die Cubikwurzel aus dem Nenner vollkommen.

Z. B. so ist $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2+3^2}{3+3^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$ rc.

1. Zusatz.

§. 201. Ist der gegebene Bruch ein Decimalbruch, so erhält man die Cubikwurzel:

1) Wenn

1) Wenn die Anzahl der Decimalstellen durch 3 theilbar ist, wie aus einer ganzen Zahl, indem man selbige aus dem Zähler extrahiret, und der Wurzel nur den dritten Theil Decimalstellen des Zählers giebt.

Z. B. $\sqrt[3]{0,\ 216} = 0,\ 6$; denn es ist $\sqrt[3]{0,\ 216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{6}{10} = 0,\ 6.$

2) Ist die Anzahl der Decimalstellen so beschaffen, daß auf die Classen nicht 3 Zahlzeichen kommen; so setzt man zur Rechten so viel Nullen an, als Stellen fehlen, weil sich der Werth des Bruches dadurch nicht ändert. (§. 95.)

Z. B. $\sqrt[3]{0{,}5021} = \sqrt[3]{0{,}502100} = \sqrt[3]{\frac{502100}{1000000}} = \frac{78}{100} = 0,\ 78 \ldots\ldots$

2. Zusatz.

§. 202. Gemeine Brüche, besonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Cubikzahlen sind, können auch in Decimalbrüche (§. 104.) verwandelt, und die Cubikwurzel kann nach §. 201. extrahiret werden.

Z. B. $\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} = 0,\ 666666 \ldots$ (§. 104.)

0	666	666	0, 87 .....
	512		
	154	666	
	(19	2)	
	134	4	
	11	76	
		343	
	146	50	
	8	163	

3. Zusatz.

§. 203. Ist es ein gemischter Bruch, so verwandelt man ihn in einen unächten Bruch, (§. 61.) und extrahiret die

die Cubikwurzel, (§. 200.) oder, man verwandelt ihn in einen Decimalbruch, (§. 104.) und extrahirt die Cubikwurzel, nach §. 202.

Z. B. $\sqrt[3]{18\frac{26}{27}} = \sqrt[3]{\frac{512}{27}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$; und $\sqrt[3]{2\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2,333} = 1,3 \ldots$

Eben so verfähret man auch mit den ursprünglichen Decimalbrüchen.

Z. B. $\sqrt[3]{10,3954} = \sqrt[3]{10,39500} = \frac{202}{100} = 2,02.$

Aufgabe.

§. 204. Aus einer unvollkommenen Cubikzahl die Wurzel durch Annäherung so genau zu finden, als verlangt wird.

Auflösung.

1) Man verwandele die gegebene Zahl in einen Decimalbruch, der zum Nenner eine vollkommene Cubikzahl hat, oder, welches einerlei ist, man füge derselben eine beliebige Anzahl Classen, jede zu 3 Nullen, bei.

2) Ist die Anzahl der zu findenden Decimalstellen vorgeschrieben, so darf man nur der gegebenen Cubikzahl soviel Classen Nullen beifügen.

3) Nun extrahire man, wie gewöhnlich, die Cubikwurzel, nur daß die Wurzel den dritten Theil Decimalstellen erhält, als der gegebenen Zahl beigefügt sind. (§. 193.)

Z. B. Es sei aus der Zahl 3 die Cubikwurzel zu ziehen, so ist $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{3000000}{1000000}}$ (§. 60, 64 und 203.) $=$

$$\frac{\sqrt[3]{3000000}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{3000000}}{100}$$

```
3|000|000|  1, 44 . . .
1|   |   |
------------
 2|000|
 (|3) |
------------
 1|2  |
  |48 |
  | 64|
------------
 1|744|
----------------
  |256|000
  |(58|8)
----------------
  |235|2
  |  6|72
  |   |64
----------------
  |241|984
----------------
  | 14|016 u. s. w.
```

Zusatz.

§. 205. Man siehet, daß man diese Classen von Nullen ebenfalls, wie bei der Quadratzahl, erst während des Extrahirens beifügen kann.

Anmerkung.

Obgleich die Wurzel nie genau gefunden werden kann, so kann man sich doch derselben so weit nähern, als verlangt wird.

Vierter Abschnitt.
Von der Analysis.

Erstes Kapitel.
Von den Begriffen der Analysis, der Eintheilung und Reduction der Gleichungen überhaupt.

I. Eintheilung und Begriffe der Gleichungen.

Erklärungen.

§. 206. Wird eine Größe durch Hülfe ihrer Theile auf verschiedene Art ausgedruckt, ohne daß ihr Werth verändert wird; so nennt man die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke eine **Gleichung** (Aequation). Z. B. $\frac{24}{3} + 6 = 18 - 4$. $4 \times 3 = 8 + 6 - 2$. Allgemein $ab - c = xf$.

Die einzelnen durch + und — mit einander verbundenen Größen heißen **Glieder**, und jeder Ausdruck vor und nach dem Gleichheitszeichen, **Theile**, **Seiten**, oder auch, weniger gebräuchlich, **Hälften**, der Gleichung.

§. 207. In einer Gleichung können bekannte und unbekannte Größen mit einander verbunden sein, wenn man nur aus andern Gründen weiß, daß beide Seiten gleich sind. Die Wissenschaft aber, unbekannte Größen aus andern bekannten, vermittelst der Gleichungen, zu finden, heißt die **Analysis** oder **Algebra**. Die unbekannten Glieder werden gemeiniglich mit den Buch-

staben

staben x, y oder z, die bekannten aber mit den ersten Buchstaben des Alphabetes bezeichnet.

§. 208. Die unbekannte Größe muß in den gegebenen ihren hinreichenden Grund haben; das ist: es müssen solche Verhältnisse zwischen beiden angegeben werden, wodurch die Gleichheit festgesetzt, und die Findung der gesuchten Größe möglich gemacht wird. Z. B. $\frac{24}{3} + 6 = x$ heißt soviel: die Zahl 24 soll durch 3 dividirt, zu dem Quotienten 8 aber 6 addiret werden; so ist die Zahl 14 die gesuchte Größe x.

§. 209. Befindet sich in einer Gleichung nur eine unbekannte Größe; so heißt sie bestimmt. Z. B. $ax = b + c$. Enthält sie aber mehrere unbekannte Größen; so heißt sie unbestimmt. Z. B. $4x - b = 3y + c$.

§. 210. Eine Gleichung, in welcher die unbekannte Größe in ihrer ersten Potenz erscheint, heißt man eine einfache Gleichung. Z. B. $x = \frac{a+b}{3}$. Erscheinet sie aber in höhern Potenzen, so nennt man sie eine zusammengesetzte, auch eine höhere Gleichung. Insbesondere nennt man eine Gleichung, in welcher die unbekannte Größe in der zweiten Potenz ist, eine quadratische; z. B. $ax^2 = b + e$; und so hat man auch cubische Gleichungen; z. B. $x^3 = cm - d$. Gleichungen, wo die unbekannte Größe in der ersten Potenz ist, heißen auch Gleichungen vom ersten Grade; wo sie in der zweiten Potenz ist, vom zweiten, und so vom dritten Grade rc.

§. 211. Eine reine bestimmte Gleichung ist eine solche, worin die unbekannte Größe überall auf eine und eben dieselbe Potenz erhoben ist; als $4x^2 = ax^2 - b$; im Gegentheile aber, eine unreine bestimmte Gleichung, wie $y + b = by^2 + y^3$.

§. 212.

§. 212. Die Aufgaben theilen sich, nach den in denselben enthaltenen Gleichungen, ebenfalls in einfache, zusammengesetzte, quadratische, cubische ꝛc. ein.

Sind in einer Aufgabe so viele Bedingungen enthalten, als in derselben unbekannte Größen gesucht werden; so heißt die Aufgabe bestimmt, im Gegentheile aber unbestimmt. Endlich heißt eine Aufgabe möglich, wenn sich die in ihr befindlichen Bedingungen nicht widersprechen; ist das letztere, so heißt die Aufgabe unmöglich.

§. 213. Um durch Hülfe der Gleichungen aus bekannten Größen unbekannte zu finden, muß man:

1) Aus den in jeder Aufgabe oder vorgelegten Frage enthaltenen Bedingungen der bekannten und unbekannten Größen, diese Größen selbst untereinander so zu verbinden suchen, daß daraus eine Gleichung formirt werden kann.

2) Aus dieser Gleichung, welche unmittelbar aus den in einer Aufgabe enthaltenen Bedingungen hergeleitet wird, und welche die Fundamentalgleichung heißt, leitet man nun, nach Beschaffenheit der Aufgabe, durch Hülfe mehrerer Gleichungen, eine her, die nicht mehr als eine unbekannte Größe, verbunden mit bekannten, enthält, und die Endgleichung genannt wird.

3) Sucht man die unbekannte Größe von den bekannten so zu trennen daß, auf der einen Seite der Gleichung, die unbekannte allein, auf der andern aber die bekannten erscheinen. Dieses Verfahren heißt die Auflösung oder die Reduction der Gleichung.

4) Leitet man endlich aus dieser reducirten Gleichung die Regeln her, durch deren Anwendung der Werth der gesuchten Größe bestimmt wird, das heißt: man macht sie zur Formel.

II. Ein-

II. Einfache bestimmte Gleichungen.

Aufgabe.

§. 214. Eine einfache bestimmte Gleichung aufzulösen, (zu resolviren.)

Auflösung.

Die Reduction selbst gründet sich auf die in der Arithmetik gegebenen allgemeinen Grundsätze.

1) Ist die unbekannte Größe mit der bekannten durch die Addition verbunden; so erhält man die unbekannte allein, wenn man die bekannte von beiden Hälften der Gleichung subtrahiret. Z. B.

$$x + a = b$$
$$-\ a = -\ a \text{ subtr.}$$
$$x + a - a = b - a \text{ (§. 26. No. 1.)}$$

das ist $x = b - a$

Ferner: $x + 2a + 4b = c + d$
$$-\ 2a - 4b = -\ 2a - 4b$$

so ist $x = c + d - 2a - 4b$

2) Ist die unbekannte Größe mit den bekannten durch die Subtraction verbunden; so findet man die unbekannte, wenn man die bekannten zu beiden Seiten der Gleichung addiret. Z. B.

$$x - a = b$$
$$+\ a = +\ a \text{ addir.}$$
$$x - a + a = b + a \text{ (§. 21. No. 1.)}$$

das ist $x = b + a$

Ferner: $x - a - b = c$
$$+\ a + b = +\ a + b$$

so ist $x = c + a + b$

Hieraus erhält man aber überhaupt die Regel:

3) Jede Größe bringt man von einer Seite der Gleichung auf die andere, ohne Nachtheil, wenn man solche mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite setzt. Z. B.

$$x + 2a - 3b = c - 3d$$

so ist $x = c - 3d - 2a + 3b$

4) Ist

4) Ist die unbekannte Größe mit einer bekannten multiplicirt; so erhält man die unbekannte allein, wenn man mit der bekannten die Gleichung auf beiden Seiten dividirt. Z. B.

$$ax = b$$

so ist $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ (§. 40. No. 1.)

und folglich $x = \frac{b}{a}$.

Ferner: $ax = 24b - 3c$

so ist $x = \frac{24b - 3c}{a}$

Ferner: $ax + b - c = bd$

so ist $x = \frac{bd - b + c}{a}$.

5) Ist die unbekannte Größe mit einer bekannten dividiret; so erhält man die unbekannte Größe allein, wenn man die Gleichung auf beiden Seiten multiplicirt. Z. B.

$$\frac{x}{a} = b$$

so ist $\frac{xa}{a} = ab$

und folglich $x = ab$ (§. 33. No. 1.)

Ferner: $\frac{a}{x} = b$

so ist $a = bx$

und $\frac{a}{b} = x$.

Ferner: $\frac{x}{a} + b - 3c = a$

so ist $x = (a - b + 3c)\,a$

oder $x = aa - ab + 3ac$

Hieraus ist nun eine besondere Regel entstanden.

6) Kommen unter den Gliedern der Gleichung Brüche vor; so multiplicire man die ganze Gleichung mit dem Producte aller Nenner. Z. B.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - a = e + f.$$

so ist $12x + 8x + 6x - 24a = 24e + 24f$
und $26x - 24a = 24e + 24f$
und $26x = 24e + 24f + 24a$
und endl. $x = \frac{24e + 24f + 24a}{26}$.

7) Kommt endlich die unbekannte Größe in beiden Seiten der Gleichung vor; so bringt man sie, nach No. 2., auf eine Seite, und zwar dahin, wo die größte unbekannte stehet. Dieses geschiehet, um x positiv zu erhalten. Z. B.

$$x + a = 2x - b$$
$$a = 2x - x - b$$
d. i. $a = x - b$
und $a + b = x$

Ferner: $x + 1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$
so ist $12x + 12 = 6x + 4x + 3x$. (No. 6.)
d. ist $12x + 12 = 13x$
und $12 = 13x - 12x$.
d. i. $12 = x$

8) Wenn die unbekannte Größe zu einer Potenz erhoben ist; so wird sie allein gebracht, und hierauf die Wurzel dieser Potenz aus beiden Seiten der Gleichung gezogen. Z. B.

$$x^2 - ab = cd + e$$
so ist $x^2 = cd + e + ab$
und $x = \sqrt{cd + e + ab}$

9) Ist die unbekannte Größe eine Wurzelgröße, oder, welches einerlei ist, befindet sie sich unter dem Wurzelzeichen; so wird sie allein geschafft, das Wurzelzeichen weggelassen, die Größen in der andern Hälfte aber werden auf diejenige Potenz erhoben, welche der Wurzelexponent angiebt. Z. B.

$$\sqrt{x} + f = b$$
so ist $\sqrt{x} = b - f$
und $x = (b - f)^2 = b^2 - 2bf + f^2$.

I. Zu-

1. Zusatz.

§. 215. Man siehet aus diesen Auflösungen, daß man auf diese Art, durch Versetzung auf die andere Seite der Gleichung, eine jede negative Größe positiv machen kann, welches besonders nöthig wird, wenn die unbekannte Größe negativ ist. Z. B.

$$a - x + b = c + d$$

so ist $a + b - c - d = x$

Ferner: $a - b = c - x + d$

so ist $x = c + d - a + b$.

2. Zusatz.

§. 216. Sind in einer Gleichung alle Größen durch einander multiplicirt oder dividirt; so kann man sie gänzlich, ohne Nachtheil der Gleichheit, weglassen. Z. B.

$$nx + nb = nc + nf$$

so ist $x + b = c + f$

und $x = c + f - b$.

Oder:

$$\frac{x + b - e}{n} = \frac{cd}{n}$$

so ist $x + b - e = cd$

und $x = cd - b + e$.

3. Zusatz.

§. 217. Man kann auch jede Gleichung auf nichts oder Null reduciren, wenn man alle Theile eines Gliedes, mit verkehrten Zeichen, auf die andere Seite bringt. Z. B.

$$ax + bc = c^2 - d^2$$

so ist $ax + bc - c^2 + d^2 = 0$.

Zweites Kapitel.

Von der Auflösung algebraischer Aufgaben vom ersten Grade mit einfachen bestimmten Gleichungen.

Aufgaben.

§. 218. Ein Officier bekam, zu einer Attake, Grenadiers, Musketiers, Dragoner und Husaren. Die Anzahl der Musketiers war um 40 Mann kleiner, als die sämmtliche Anzahl der Grenadiers, Dragoner und Husaren; Husaren waren 20 Mann mehr als Dragoner; Grenadiers 60 Mann weniger als Dragoner und Husaren zusammengenommen, und das ganze Commando bestand aus 480 Mann. Wieviel Soldaten von jeder Gattung befanden sich bei dem Commando?

Auflösung.

Es sei die Anzahl der Dragoner $= x$,
so sind:

x	Dragoner	$= x$
$x+20$	Husaren	$= x+20$
$x+x+20-60$	Grenadiers	$= 2x-40$
$x+x+20+x+x+20-60-40$	Musketiers	$= 4x-60$
	zusammen	$8x+20-100$.

Die Gleichung ist also:

$$8x + 20 - 100 = 480$$

$$8x = 480 - 20 + 100 \text{ (§. 214. No. 3.)}$$

d. i. $8x = 560$

und $x = \frac{560}{8} = 70$ = d. Anz. d. Drag. (§. 214. N. 4.)

Folglich enthält das Commando:

70 Dragoner.
$70 + 20 = 90$ Husaren.
$70 + 90 - 60 = 100$ Grenadiers.
$70 + 90 + 100 - 40 = 220$ Musketiers

und es ist $70 + 90 + 100 + 220 = 480$ = d. Commando.

Auf-

Aufgabe.

§. 219. Ein Kapitain wurde gefragt, wie stark seine Compagnie sei? Worauf er antwortete: die Hälfte sei in den Trencheen, der vierte Theil im Lager, der siebente auf Commando, und 9 Blessirte lägen im Lazarethe. Wie stark ist nun wohl die Compagnie gewesen?

Auflösung.

Setzt man die Anzahl aller Soldaten $= x$, so sind:

in den Trencheen $= \frac{x}{2}$

in dem Lager $= \frac{x}{4}$

auf Commando $= \frac{x}{7}$

dazu die Blessirten $= 9$

zusammen $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 9$.

Die Gleichung ist also:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 9 = x$$

so ist $\frac{14x + 7x + 4x}{28} + 9 = x$

oder $14x + 7x + 4x + 252 = 28x$ (§. 214. No. 6.)

d. i. $25x + 252 = 28x$

und $252 = 28x - 25x$ (§. 214. No. 7.)

d. i. $252 = 3x$

und $\frac{252}{3} = x = 84 =$ Anzahl der Soldaten.

Folglich sind:

in den Trencheen $\frac{x}{2} = \frac{84}{2} = 42$ Mann.

im Lager $\frac{x}{4} = \frac{84}{4} = 21$ „

auf Commando $\frac{x}{7} = \frac{84}{7} = 12$ „

dazu die Blessirten $= 9$ „

Summa der ganzen Compagnie $= 84$ Mann.

Auf-

Aufgabe.

§. 220. Zwei Couriere, A und B, machen einerlei Weg. B geht 3 Tage später aus als A, macht aber den Tag 6 Meilen, da A nur 4 Meilen macht. In wieviel Tagen wird A eingeholet werden?

Auflösung.

Der Courier A macht täglich 4 Meilen $= a$.
" " B " " 6 " $= b$.
die Zeit, welche A voraus hat, nämlich 3 Tage $= c$.
die Zeit, in welcher A eingeholet wird $= x$.

Multipliciret man die 3 Tage, welche A voraus hat $= c$, mit den täglichen 4 Meilen $= a$; so bekömmt man den Weg ac, und so giebt ax den Weg, in welchem A eingeholet wird, und bx den Weg von B. Nun müssen aber bei der Einholung beide Wege einander gleich sein; folglich ist die Gleichung $bx = ac + ax$, das ist, gleich dem Wege, den A zurückgelegt hat, und folglich die Gleichung:

$$bx = ac + ax$$

und $$bx - ax = ac$$

so ist $$x = \frac{ac}{b-a} = \frac{4 \times 3}{6-4} = 6 \text{ Tage.}$$

Zusatz.

§. 221. Diese Formel (Regel) kann auch benutzt werden, wenn die Aufgabe umgekehrt vorgelegt wird. Z. B. Ein Courier A, der 10 Meilen täglich machen soll, ist $1\frac{1}{2}$ Tag fort. Er soll eingeholt werden, ehe er über 60 Meilen zurückgelegt hat. Wieviel Meilen muß der Nachgeschickte, B, den Tag machen, wenn er A, unter der gegebenen Bedingung, einholen soll? Man siehet, daß hier b das gesuchte ist, und daß man sich also nur der obigen Gleichung $x = \frac{ac}{b-a}$ bedienen und auf b reduciren darf; so ist

$$x = \frac{ac}{b-a}$$

also $(b-a)\,x = ac$ (§. 214. No. 5.)

folglich $b - a = \frac{ac}{x}$ (§. 214. No. 4.)

d. i. $b = \frac{ac}{x} + a$ (§. 214. No. 2.)

Nun

Nun ist $a = 10$, $c = 1\frac{1}{2}$, und weil A höchstens 60 Meilen gemacht haben soll;

so ist $x = \frac{60 - 15}{10} = \frac{45}{10} = 4\frac{5}{10}$ Tag; folglich

$$b = \frac{10 \times \frac{3}{2}}{4\frac{5}{10}} + 10 = 10 + \frac{30}{9} = 13\frac{1}{3} \text{ Meile.}$$

Anmerkung.

Diese Auflösungen können allgemein für jede zwei Körper, A und B, die in Bewegung sind, gelten, wenn der langsamere vor dem geschwindern voraus ist. Auch kann man, statt Courier, oder überhaupt, Körper, auch Armee, Corps, Commando 2c. setzen, und folglich die Auflösungen dieser Aufgabe, mit vorzüglichem Nutzen in der Tactik, oder überhaupt in den Kriegswissenschaften, anwenden.

Aufgabe.

§. 222. Ein General überließ verschiedenen braven Officieren ihre gemachte Beute, mit der Bedingung: A nimmt 1000 Thlr. voraus, und noch $\frac{1}{5}$ vom Reste; B nimmt 2000 Thlr. voraus, und noch $\frac{1}{5}$ vom Reste 2c.; nämlich, jeder folgende nimmt 1000 Thlr. mehr voraus, als der vorhergehende, und $\frac{1}{5}$ vom Reste, so lange noch ein Rest vorhanden ist. Nachdem die Officiers getheilt hatten; so fand sichs, daß einer so viel als der andere von der gemachten Beute erhielt. Die Frage ist: wie groß war die Beute, wieviel Officiers gehörten dazu, und wieviel bekam ein jeder?

Auflösung.

Die Beute sei $= x$; 1000 Thlr. $= a$; 2000 Thlr. $= 2a$.

A nimmt also $= a + \frac{x - a}{5}$.

Subtrahirt man diesen Theil, den der erste A bekommt, von x; so erhält man:

$$x - a - \frac{x + a}{5} = \frac{4x - 4a}{5} = \frac{4}{5}(x - a) =$$

dem Reste, den A übrig läßt.

B erhält

B erhält also:

$$2a + \frac{\frac{4}{5}(x - a) - 2a}{5}$$

oder $2a + \frac{(4x - 4a - 2a)}{5} : 5.$

oder $2a + \frac{(4x - 4a - 10a)}{5} : 5.$

oder $2a + \frac{4x - 4a - 10a}{25}$

oder $\frac{50a + 4x - 4a - 10a}{25}$

oder $\frac{36a + 4x}{25} = B.$

Da nun A = B sein soll, so ist

$$\frac{5a + x - a}{5} = \frac{36a + 4x}{25}$$

Woraus $x = 16a = 16000$ Thlr.

A bekommt daher 4000 Thlr; eben soviel bekommt auch B, und $\frac{16000}{4000} = 4$, giebt die Anzahl der Officiers.

Anmerkung.

Man siehet hieraus, wie man mit Aufgaben dieser Art, wo mehr als eine unbekannte Größe gesucht werden soll, verfahren muß.

Beispiele zur Uebung.

I. Es haben 4 Sappeurs eine gewisse Anzahl Sappen gemacht, und dafür 140 Thlr. erhalten. Der zweite Sappeur hat 3mal mehr als der erste, weniger 8 Thlr.; der dritte hat die Hälfte von dem, was der erste und zweite zusammen bekommen, weniger 12 Thlr., und der vierte hat so viel als der erste und dritte bekommen. Wieviel hat jeder erhalten?

der erste	20	Thlr.
= zweite	52	=
= dritte	24	=
= vierte	44	=
Summa	140	Thlr.

II. Eine

II. Eine gewisse Anzahl Husaren geriethen in ein Scharmützel. Als sie eine Zeit lang geplänkert hatten, kamen ihnen noch 12 zu Hülfe. Nach einem harten Gefechte blieb die Hälfte von ihnen auf dem Platze; die übrigen ergriffen die Flucht; unterweges fanden sich noch zwei zu ihnen. Als sie nun zurück ins Lager kamen, war ihre Anzahl um 3 Mann größer, als da sie ausgeritten waren. Wieviel sind ihrer vorher, und wieviel nachher gewesen?

Im Anfange 10 Husaren; dazu kommen 12; so sind nun 22 Husaren. Davon ist die Hälfte geblieben; folglich ist der Rest = 11. Hierzu kommen noch 2 andere; folglich kommen 13 Mann im Lager an, und also 3 Husaren mehr, als anfänglich ausgeritten waren.

III. Eine Armee ist folgendergestalt vertheilt, als:

$\frac{1}{4}$ belagert eine Festung;

$\frac{1}{3}$ stehet in einem Observationslager;

$\frac{1}{7}$ ist als Avantgarde aufgestellt;

$\frac{1}{15}$ zur Besetzung einiger wichtigen Posten;

$\frac{1}{9}$ macht die Reserve aus, und 3500 liegen in den Lazarethen. Wie stark ist nun die Armee? 90000 Mann.

IV. Auf einer Wachtparade befinden sich 266 Soldaten, worunter 4mal so viel Gemeine, als Officiers, und doppelt so viel Unterofficiers als Officiers sind, wieviel waren von jeder Gattung da? 38 Offiziers, 76 Unteroffiziers und 152 Gemeine.

V. Es werden 3040 Mann kommandirt, wovon $3\frac{1}{2}$mal so viel Kavallerie als Kanoniers, und $2\frac{1}{3}$mal so viel Infanterie als Kavallerie waren; aus wieviel Mann Artillerie, Kavallerie und Infanterie bestand das Detaschement? Aus 240 Mann Kanoniers, 840 Mann Kavallerie und 1960 Mann Infanterie.

VI. Bei einer Schanzarbeit soll der 3te Theil zum Faschinenbinden, der 8te Theil zum Schanzkorbflechten, der 10te Theil zum Wiedendrehen, und 318 Mann zur Hebung des Grabens genommen werden; wieviel Arbeiter sind dabei angestellt? 720 Mann.

VII. Auf einer Batterie wurden den ersten Tag das Drittel von dem vorhandenen Kugelschuß verschossen; den zweiten Tag das Viertel von dem, was noch vorräthig war, und den dritten Tag der fünfte Theil, so daß noch 26 Schuß übrig blieben; wieviel waren also überhaupt vorhanden? 65 Schuß.

Drit-

Drittes Kapitel.

Von der Auflösung algebraischer Aufgaben vom ersten Grade, mit mehrern unbekannten Größen, oder mit unbestimmten Gleichungen.

Erklärung.

§. 223. Es geschiehet oft, daß man auf Fragen kommt, wo man zwei oder mehr unbekannte Größen antrifft. In der Hauptsache sind die Regeln, die uns zur Auflösung dienen, dieselben, als bei den Aufgaben mit einer unbekannten Größe, nur daß hier so viel Gleichungen gemacht werden müssen, als unbekannte Größen vorhanden sind, und daß aus diesen Gleichungen alsdann die Generalgleichung formirt werden muß, wo nur eine der unbekannten Größen erscheint.

Man kann aber hierzu, sowohl durch die Substitution, als durch die Vergleichung zweier Werthe von einerlei unbekannten Größe, gelangen.

Aufgabe.

§. 224. Aus der bekannten Summe zweier Größen, nebst ihrer Differenz, die Größen selbst zu finden.

Auflösung.

Es sei die Summe $= s$, die größere Größe $= x$
" " " Differenz $= d$, " kleinere " $= y$.

Aus den Bedingungen der Aufgabe entstehen folgende Gleichungen:

I.	II.
$x + y = s.$	$x - y = d.$

A) Um die Generalgleichung durch die Substitution zu formiren.

1) Man reducire die erste Gleichung auf x, und setze den gefundenen Werth in die andere Gleichung, an die Stelle von x. Z. B.

$x + y$

$x + y = s$ (aus I.) $x - y = d$ (aus II.)
so ist $x = s - y$ und $s - y - y = d$,
oder $s - 2y = d$ und
folglich $\frac{s - d}{2} = y$.

2) Eben so kann man auch die erste Gleichung auf y reduciren, und den gefundenen Werth in die andere Gleichung an die Stelle von y setzen. Z. B.

$x + y = s$ (aus I.) $x - y = d$ (aus II.)
$y = s - x$ und $x - s + x = d$,
oder $2x - s = d$
folglich $x = \frac{s + d}{2}$.

3) Man könnte auch, wenn der Werth einer unbekannten Größe, z. B. hier von y, (No. 1.) gefunden worden, selbigen in die beiden Gleichungen, z. B. in die erstere, an die Stelle von y setzen; so hat man:

$$x + \frac{s - d}{2} = s;$$

und folglich $x = \frac{s + d}{2}$.

Ausübung.

Es sei $18 = s =$ der Summe,
und $4 = d =$ der Differenz;
so ist $x = \frac{s + d}{2} = \frac{18 + 4}{2} = 11$ die größte Größe,
und $y = \frac{s - d}{2} = \frac{18 - 4}{2} = 7$ die kleinere Größe.

B) Die Generalgleichung durch die Vergleichung zweier Werthe zu finden.

1) Man reducire jede der gegebenen Gleichungen auf einerlei unbekannte Größe, und mache aus den beiden gefundenen Werthen die Generalgleichung, in welcher nunmehr nur eine unbekannte Größe erscheint, welche man, wie gewöhnlich, reduciret. Z. B.

I. $x + y = s$, so ist $x = s - y$

II. $x - y = d$, und $x = d + y$.

Gene-

Generalgleichung.

$$s - y = d + y \text{ (aus I. und II.)}$$

und $s - d = 2y$

folglich $\frac{s - d}{2} = y.$

2) Setzt man nun den Werth von y in eine der vorigen Gleichungen; so ist auch x bestimmt. Z. B.

$$x = d + \frac{s - d}{2}$$

und $2x = 2d + s - d$

folglich $x = \frac{s + d}{2}.$

Zusatz.

§. 225. Auch durch die Addition und Subtraction der Gleichungen kann man auf eine sehr kurze Art zum Zwecke gelangen; z. B.

I. Durch die Addition.

1ste Gleichung $x + y = s$ } add.
2te " " $x - y = d$

$2x = s + d$

und $x = \frac{s + d}{2}.$

II. Durch die Subtract.

$x + y = s$ } subt.
$x - y = d$
$- \quad + \quad -$

$2y = s - d$

und $y = \frac{s - d}{2}.$

1. Anmerkung.

Die beiden ersten Methoden sind allgemein, und lassen sich, bei allen Aufgaben von mehrern unbekannten Größen, ohne Unterschied, anwenden; vorzüglich bedient man sich der zweiten Methode, durch Vergleichung der Werthe.

2. Anmerkung.

Aus diesen beiden Formeln von x und y läßt sich eine allgemeine Regel ziehen, welche in der Mathematik öfters angewendet werden kann. Ein Beispiel davon findet man in der Trigonometrie. Diese Regel aber ist: Wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addiret, so hat man die größte Größe. Subtrahirt man beide von einander, so erhält man die kleinere Größe.

Aufgabe.

§. 226. Eine Besatzung, die theils aus Fußvolk, theils aus Reiterei bestand, kostete monatlich 12000 Thaler zu unterhalten. Der Antheil für die

Reite=

Reiterei betrug 1800 Thaler mehr, als für das Fußvolk. Wie hoch ist der Antheil für ein jedes Corps gekommen?

Auflösung.

A) Durch die Substitution.

Der monatliche Sold $= 12000$ Thlr.
Der Antheil der Reiterei $= x$.
Der Ueberschuß . $= 1800$.
Der Antheil des Fußvolkes $= y$.

So ist I. | II.

$x + y = 12000$ | $x - y = 1800$
$x = 12000 - y$ | so ist $12000 - y - y = 1800$
und $12000 - 1800 = 2y$
folglich $5100 = y$.

Um x zu finden, so ist:
$$x = 12000 - 5100 = 6900.$$

B) Durch die Vergleichung zweier Werthe.

I. | II.

$x + y = 12000$ | $x - y = 1800$
$x = 12000 - y$ | $x = 1800 + y$.

so ist:
$$12000 - y = 1800 + y$$
und $12000 - 1800 = 2y$
folglich $5100 = y$.

Um x zu finden, so ist:
$$x = 12000 - 5100 = 6900 \text{ Thlr.}$$

Zusatz.

§. 227. Durch die Addition und Subtraction läßt sich diese Aufgabe folgendergestalt auflösen:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 12000 \\ x - y = 1800 \end{array}\right\} \text{add.} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 12000 \\ x - y = 1800 \end{array}\right\} \text{subt.}$$

$$2x = 13800 \qquad 2y = 10200$$

$$\text{und } x = 6900 \qquad \text{und } y = 5100.$$

Beispiele zur Uebung.

I. Ein Partheigänger will die gemachte Beute unter seine Leute austheilen, und findet, daß, wenn er dem Manne 4 Thlr. giebt, er 20 Thlr. für sich übrig behält; wenn

wenn er aber jedem 5 Thlr. giebt, ihm 60 Thlr. fehlen. Wie viel hat die Beute an Gelde betragen, und wie stark ist seine Mannschaft gewesen? Die Mannschaft war 80 Mann, und 340 Thlr. betrug die Beute.

II. Zwei Geldwechsler, A und B, gingen zusammen, mit 1000 Ducaten, auf die Messe. A gewinnt mit 4 Ducaten Einen, und B mit 3 Ducaten zwei; zusammen war der Gewinst: 450 Ducaten. Wie viel hat jeder gehabt und gewonnen?

A hat 520 Ducaten }
B „ 480 „ } bei sich gehabt,

und

A hat 130 Ducaten }
B „ 320 „ } gewonnen.

Zusatz.

§. 228. Die Auflösung der Aufgaben, wo mehr als zwei unbekannte Größen vorkommen, ist mit den vorigen einerlei; nämlich es müssen ebenfalls so viel Fundamentalgleichungen gemacht werden, als unbekannte Größen vorhanden sind, welche alsdann, nach den oben beschriebenen Methoden, (§. 224.) ausgeführt und auf eine unbekannte Größe reducirt werden müssen, da denn die übrigen unbekannten, als Folgerungen, sich herleiten lassen. Die Auflösung folgender Aufgabe wird dieses deutlicher machen.

Aufgabe.

§. 229. Drei Feuerwerker haben, in einem Tage, eine gewisse Anzahl Bomben in einen belagerten Platz geworfen. A und B haben 20 Bomben mehr als C, B und C haben 32 Bomben mehr als A, und A und C haben 28 Bomben mehr als B geworfen. Wie viel Bomben hat jeder Feuerwerker geworfen?

Auflösung.

Durch die Substitution.

A hat geworfen x Bomben.
B „ „ y „
C „ „ z „

I.

I.	II.	III.
$x+y=z+20$	$y+z=x+32.$	$x+z=y+28.$
$x+y-20=z$	$y+x+y-20=x+32$	$x+x+y-20=y+28.$
	od. $2y+x-20=x+32$	u. $2x+y-20=y+28.$
	u. $2y-20=32$	u. $2x-20=28.$
	fgl. $2y=52$	fgl. $2x=48$
	u. dah. $y=\frac{52}{2}=26.$	u. dah. $x=\frac{48}{2}=24.$

Um z noch zu finden, so ist $x+y=z+20$
daher $24+26=z+20$
folglich $30=z.$

Probe.

A hat geworf. 20 mehr als der dritte; also $24+26=50$
Nun hat der dritte . . $=30$
Unterschied 20 u. s. w.

Anmerkung.

Diese Aufgaben lassen sich ebenfalls durch Vergleichung der Werthe auflösen; jedoch ist die vorhergehende Auflösung etwas kürzer.

Viertes Kapitel.

Von Auflösung algebraischer Aufgaben vom zweiten Grade, oder, von den sogenannten quadratischen Gleichungen.

Erklärungen.

§. 230. Jede Gleichung, in welcher die unbekannte Größe in der zweiten Potenz stehet, heißt eine quadratische Gleichung. Sind die beiden Seiten derselben vollkommene Quadrate, so heißt sie eine reine quadratische Gleichung. Um sie aufzulösen, muß man die Theile genau kennen, aus welchen ein vollkommenes Quadrat zusammengesetzt ist. Diese sind aber (§. 171.) $a^2+2ab+b^2$, woraus die Wurzel $a+b$ ist. Dergleichen Gleichungen lassen sich leicht reduciren, indem man nur diejenigen Größen, wo sich die unbekannte Größe befindet, und die ein vollkommenes Quadrat ausmachen, in die eine Seite der Gleichung allein bringt, und alsdann die Quadratwur-

zel

zel aus beiden Seiten der Gleichung ziehet. (§. 224. No. 2.)

Sind diese Theile aber in einer Gleichung nicht alle vorhanden, so daß bei einer zweinamigen Wurzel das Quadrat des einen Theiles abgehet, so heißt sie eine unreine quadratische Gleichung; z B. so sind $x^2 = ab$; und $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = bc$ reine quadratische Gleichungen, denn sie enthalten vollkommene Quadrate der Wurzeln x und $x + \frac{a}{2}$. Hingegen sind $x^2 + 2ax = ed$, und $x^2 - \frac{2x}{3} = ac$, unreine quadratische Gleichungen, denn sie enthalten unvollkommene Quadrate der Wurzeln $x + a$ und $x - \frac{1}{3}$, weil in beiden das Quadrat des zweiten Theiles abgehet. Der allgemeine Ausdruck der unreinen quadratischen Gleichung ist $x^2 \pm ax = \pm b^2$.

§. 231. Da es zu wissen nöthig ist, ob das in einer Gleichung enthaltene Quadrat der unbekannten Größe vollkommen oder unvollkommen sei; so finden folgende Regeln Statt.

1) Ist die unbekannte Größe zum Quadrate erhoben, und erscheint nicht mehr in der Gleichung; so ist sie das Quadrat einer einnamigen Wurzel und daher vollkommen. Z. B.

$$x^2 + ac = b^2.$$

2) Ist die unbekannte Größe nicht nur zum Quadrate erhoben, sondern sie ist auch noch mit einer andern, bekannten, doppelt genommen, multipliciret, und von dieser bekannten ist das Quadrat gleichfalls vorhanden; so enthält die Gleichung alle Theile des Quadrates einer zweinamigen Wurzel, (§. 171.) und ist daher vollkommen. Z. B.

$$x^2 + 2ax + a^2 = cd.$$

Um

Um diese Theile des Quadrates desto leichter zu finden, kann die Gleichung am füglichsten auf Null reduciret werden, (§. 217.) jedoch so, daß das Quadrat der unbekannten Größe positiv wird (§. 215.). Z. B. Man hätte die Gleichung:

$$ad - 2ax + cd = x^2 + a^2$$

so ist $x^2 + 2ax + a^2 - ad - cd = 0$. (§. 217.).

Jedoch ist noch zu merken, daß, um ein vollkommenes Quadrat zu erhalten, sowohl das Quadrat des ersten, als auch des zweiten Theiles, positiv sein muß, (§. 173.) denn außerdem bleibt es allezeit unvollkommen. Z. B. $x^2 + 2bx - b^2$ ist ein unvollkommenes Quadrat, weil $x \pm b$ nicht die Wurzel davon sein kann, welche allezeit $x^2 \pm 2bx + b^2$ zum Quadrate geben würde. (§. 171. und 173.)

3) Erscheint die unbekannte Größe, nebst ihrem Quadrate, noch mit einer bekannten Größe multipliciret, das Quadrat der Hälfte dieser letztern ist aber nicht vorhanden; so ist das Quadrat allezeit unvollkommen. Z. B.

$$x^2 + ax = bc.$$

4) Erscheint die unbekannte Größe, nebst ihrem Quadrate, noch einmal, ohne mit einer bekannten multiplicirt zu sein; so muß man nachsehen, ob von der Hälfte des Coefficienten ein positives Quadrat vorhanden ist, in welchem Falle es dann vollkommen ist. Z. B. Man hätte $x^2 - x + \frac{1}{4} = c^2$, so muß man $-x$ ansehen, als ob $-\frac{1}{2}x$ zweimal vorhanden wäre; und da nun das Quadrat von $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ vorhanden ist, so ist das Quadrat vollkommen. Eben so verhält es sich auch mit $x^2 + 16x + 64 = ac$.

5) Kommt die unbekannte Größe, außer ihrem Quadrate, in Gestalt eines Bruches vor; so muß man die Hälfte von diesem Bruche nehmen, oder den

Nenner desselben mit 2 multipliciren, um zu sehen, ob das Quadrat dieser Hälfte vorhanden sei. Z. B. In der Gleichung $x^2 + \frac{2ax}{3} + \frac{a^2}{9} = ab$ ist das Quadrat vollkommen, weil das Quadrat von der Hälfte des einen Factoren $\frac{2a}{3}$, nämlich von $\frac{a}{3} = \frac{a^2}{9}$, wirklich vorhanden ist.

Im Gegentheile ist $x^2 - \frac{x^1}{3} = ac$ unvollkommen, weil das Quadrat von $\frac{1}{6}$ fehlet.

6) Führt das Quadrat der unbekannten Größe einen Coefficienten bei sich, welcher keine Quadratzahl ist, so kann niemals ein vollkommenes Quadrat in der Gleichung sein, wenn auch sonst alle übrigen Theile vorhanden wären; z. B. $6x^2 - 2ax + a^2 = ac$ ist ein unvollkommenes Quadrat.

Anmerkung.

Wenn man die so eben auseinander gesetzten Fälle der quadratischen Gleichungen wohl inne hat; so wird es nicht schwer werden, folgende Aufgaben aufzulösen.

Aufgabe.

§. 232. Ein unvollkommenes Quadrat in einer Gleichung zu ergänzen.

Auflösung.

1) Man bringt alle in der Gleichung vorhandenen Theile des Quadrates in ein Glied allein.

2) Man untersucht, nach dem vorigen §., welcher Theil dem Quadrate fehlet.

3) Diesen setzet man dann, mit dem Zeichen +, in beiden Seiten der Gleichung hinzu, wodurch das Quadrat ergänzt, und demnach die Gleichheit erhalten wird. (§. 21. No. 1.)

1. Bei-

1. Beispiel.

Es sei $x^2 - ac = 2ax$,

so ist $x^2 - 2ax = ac$. Da nun hier das Quadrat von $-a$ abgehet, so setzt man es in beide Seiten; so bekommt man:

$$x^2 - 2ax + a^2 = ac + a^2$$

wo dann die eine Seite der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, dessen Wurzel $x - a$ oder auch $a - x$ ist.

2. Beispiel.

Es ist $ab - x = cd - x^2$ zu ergänzen, so reducire man diese Gleichung auf Null, (§. 217.) jedoch so, daß x positiv wird; (§. 215.) so erhält man $x^2 - x + ab - cd = 0$. Hierauf bringe man die vorhandenen Theile des Quadrates in die eine Seite der Gleichung allein; so hat man

$$x^2 - x = cd - ab.$$

Da nun $-x$ das Doppelte von $-\frac{1}{2}x$ ist, so mache man von dem Coefficienten $\frac{1}{2}$ das Quadrat $= \frac{1}{4}$; so erhält man die Gleichung:

$$x^2 - x + \tfrac{1}{4} = cd - ab + \tfrac{1}{4} \text{ ergänzt.}$$

3. Beispiel.

Es wäre in der Gleichung $3z^2 + 4z = 18$ das unvollkommene Quadrat zu ergänzen; so ist die Regel:

1) Den Coefficienten der höchsten Potenz wegzuschaffen: als $z^2 + \frac{4}{3}z = \frac{18}{3} = 6$.

2) Den Coefficienten des zweiten Gliedes, halb genommen, zum Quadrate erhoben, und auf beiden Seiten der Gleichung addirt, giebt:

$$z^2 + \tfrac{4}{3}z + \left(\frac{4}{3 \times 2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{4}{3 \times 2}\right)^2$$

oder $z^2 + \frac{4}{3}z + \frac{16}{36} = 6 + \frac{16}{36}$ ein vollkommenes Quadrat, dessen Wurzel $z + \frac{4}{6}$ ist.

Aufgabe.

§. 233. Eine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

1) Findet man in der Gleichung nur die unbekannte Größe allein zum Quadrate erhoben, so wird sie allein gebracht,

bracht, und auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ausgezogen. (§. 231. §. 214. No. 8.)

2) Ist es eine unreine quadratische Gleichung, so ergänzt man das in der Gleichung enthaltene unvollkommene Quadrat, (§. 232.) so, daß solches in der einen Seite der Gleichung allein zu stehen kommt, in der andern aber lauter bekannte Größen sind.

3) Aus beiden Seiten der Gleichung ziehet man die Wurzel, (§. 214. No. 8.) welches auf der einen Seite wirklich geschehen kann, auf der andern aber nur durch das Wurzelzeichen angezeiget werden muß.

4) Ist die Wurzel zweinamig, folglich eine bekannte Größe in derselben enthalten; so bringe man sie auf die andere Seite der Gleichung, damit die unbekannte Größe allein zu stehen komme, so ist die Aufgabe aufgelöst. (§. 214.) Z. B.

$$x^2 = \overline{100 + 44}$$

so ist $x = \sqrt{100 + 44} = 12.$

Ferner:

$$x^2 - 6x = ab \text{ und}$$

ergänzt ist $x^2 - 6x + 9 = \overline{ab + 9}$

so ist $x - 3 = \pm\sqrt{ab+9}$

und $x = \left(\pm\sqrt{ab+9}\right) + 3.$

Anmerkung.

Weil ein jedes Quadrat $x^2 - 2ax + a^2$ eine doppelte Wurzel, nämlich $x - a$ und $a - x$ (§. 232.) haben kann; so müssen die Umstände der Aufgaben lehren, welche von beiden in jedem Falle angenommen werden müsse.

Aufgaben.

§. 234. I. Eine gewisse Anzahl Canoniere haben zusammen 529 Schüsse gethan, und man weiß, daß jeder derselben auch so viel Schüsse gethan hat, als ihre Anzahl gewesen. Wie groß ist nun, sowohl die Anzahl der Canoniere, als auch die Zahl ihrer Schüsse gewesen? Die Zahl von 529 Schüssen = a. Die Anzahl der Canoniere, als auch der Schüsse = x; so ist, nach den Bedingungen der Aufgabe,

$$x^2 = a,$$

folglich

folglich $x = \sqrt{a} = \sqrt{529} = 23$.

§. 255. II. Aus der gegebenen Summe zweier Zahlen, und dem Producte einer Zahl mit der andern, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die Summe der beiden Größen $= a$ die eine Größe $= x$
das Product . . . $= b$. andere . $= y$

so ist

I.	II.
$x + y = a$	$xy = b$
und $x = a - y$	$x = \frac{b}{y}$

daher $a - y = \frac{b}{y}$

und $ay - y^2 = b$.

Da hier nun das Quadrat von $-y$ negativ ist; so muß es durch Versetzung positiv gemacht werden, und so erhält man:

$$y^2 - ay = -b$$

ergänzt $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$

und $y - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

folglich $y = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} + \frac{a}{2}$

Da nun $x = a - y$ ist,

so ist $x = a - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} + \frac{a}{2}\right) = a - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

Es sei $a = 24$, und $b = 135$,

so ist $y = \sqrt{\frac{576}{4} - 135} + \frac{24}{2} = 3 + 12 = 15 = y$

und $x = \frac{24}{2} - \sqrt{\frac{576}{4} - 135} = 12 - 3 = 9 = x$.

Probe.

$15 + 9 = 24$.

eben so $15 \times 9 = 135$.

§. 256. III. Es wird jemand gefragt, wie viel er Geld habe? Worauf er zur Antwort giebt: Wenn man die Anzahl meines Geldes mit sich selbst multipliciret,

ciret, und hierzu noch das Sechsfache desselben addiret, so ist die Summe 216. Wie groß ist nun diese Zahl?

Auflösung.

Es sei die Summe $= 216 = b$

die Zahl des Geldes $= x$

so ist $x^2 + 6x = b$

und $x^2 + 6x + 9 = b + 9$ (§. 232.)

folglich $x + 3 = \sqrt{b+9}$

und daher $x = \sqrt{b+9} - 3 = \sqrt{216+9} - 3$

$= \sqrt{225} = 15 - 3 = 12.$

Anmerkung.

Mehrere besondere Regeln zur Auflösung der Gleichungen können hier, Kürze halber, nicht mitgetheilt werden. Hierzu gehören auch die unbestimmten Aufgaben, welche weniger Data, als Gleichungen enthalten. Ich hoffe, daß das, was hier von den Gleichungen und den Auflösungen algebraischer Aufgaben gesaget worden ist, für den Zweck dieses Lehrbuches mehr als hinreichend sein wird.

Fünfter Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

Erstes Kapitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Erklärungen.

§. 237. Die Vergleichung zweier Zahlen von einerlei Art, in Absicht ihrer Größe, nennet man: ein Verhältniß, (Ratio).

Die zwei Zahlen, die man mit einander vergleicht, heißen: Glieder des Verhältnisses (Termini), und zwar

zwar dasjenige, welches man zuerst setzt, das Vorderglied (antecedens) und das andere, das Hinterglied (consequens).

§. 238 Diese Vergleichung der Zahlen kann aber auf zweierlei Art geschehen:

1) Indem man untersucht, um wie viel Einheiten die eine Zahl größer ist, als die andere; und:

2) Wie viel mal die eine in der andern enthalten ist.

I. Arithmetische Verhältnisse.

§. 239. Die erstere Art der Vergleichung geschiehet durch die Subtraction, und heißt ein arithmetisches Verhältniß, wahrscheinlich, weil diese Verhältnisse nur in den arithmetischen Wissenschaften vorkommen.

Die Zahl, welche anzeigt, um wie viel das eine Glied größer oder kleiner als das andere ist, heißt, wie bei der Subtraction, der Unterschied oder die Differenz. Das Zeichen, wodurch das arithmetische Verhältniß ausgedrückt wird, ist verschieden. Einige bedienen sich des Zeichens der Subtraction, da es die Natur dieses Verhältnisses am besten ausdrückt, andere eines Komma. Z. B. so ist $3 - 7$ oder $3, 7$ ein arithmetisches Verhältniß, deren Differenz 4 ist. Allgemein ist $a - b$.

II. Geometrische Verhältnisse.

§. 240. Die zweite Art der Vergleichung geschiehet durch die Division, und heißt ein geometrisches Verhältniß. Das Beiwort: geometrisch, wird im bürgerlichen Leben gemeiniglich weggelassen. Der Quotient, aus welchem man siehet, wie oft das eine Glied in dem andern enthalten ist, wird der Exponent

ponent oder Name des Verhältnisses genannt.

Das Zeichen der geometrischen Verhältnisse sind entweder zwei Punkte, als das Divisionszeichen, welches auch die Natur dieses Verhältnisses am besten ausdrückt, oder ebenfalls ein Komma; z. B. 4 : 12, oder 4, 12, ist ein geometrisches Verhältniß, dessen Exponent 3 ist. Allgemein ist a : b.

1. Zusatz.

§. 241. Jede Division, und daher auch jeder Bruch kann als ein geometrisches Verhältniß angesehen werden, worin der Dividendus oder Zähler das eine, und der Divisor oder Nenner das andere Glied, der Quotient aber der Name des Verhältnisses, oder der Exponent, ist.

Bei eigentlichen Brüchen ist daher der Exponent kleiner, als die Einheit, folglich selbst ein Bruch.

§. 242. Ist das vordere Glied eines Verhältnisses kleiner als das hintere; so heißt es ein **zunehmendes Verhältniß**; ist das vordere aber größer, ein **abnehmendes Verhältniß**.

2. Zusatz.

§. 243. Bei einem zunehmenden arithmetischen Verhältnisse bestehet das folgende Glied also aus dem ersten + der Differenz; bei einem abnehmenden Verhältnisse aber − der Differenz. Ist das erste Glied = a, die Differenz = d; so ist $a - (a + d)$ ein steigendes } arithmetisches Verhältniß,
$a - (a - d)$ „ fallendes }

Im ersten Falle ist also d positiv, im andern aber negativ.

In Zahlen:

3 — 8 ein zunehmendes } arithmetisches Verhältniß.
8 — 3 „ abnehmendes }

Bei einem zunehmenden geometrischen Verhältnisse aber bestehet das folgende Glied aus dem ersten Gliede × mit dem Exponenten, bei einem abnehmenden aber dividirt durch den Exponenten. Es sei das erste Glied = a, der Exponent = e, so ist:

$a : ae$ ein zunehmendes } geometrisches Verhältniß.
$a : \frac{a}{e}$ „ abnehmendes }

In Zahlen:

7 : 28, ein zunehmendes } geometrisches Verhältniß.
28 : 7, „ abnehmendes }

III. Proportionen überhaupt.

§. 244. Zwei arithmetische Verhältnisse von einerlei Art sind einander gleich, wenn ihre Differenzen, zwei geometrische aber, wenn ihre Exponenten gleich sind.

Zwei gleiche Verhältnisse bilden eine Proportion (Ebenmaas) und die 4 Größen, welche die Proportion ausmachen, heißen die Glieder, welche daher proportional sind, oder in Proportion stehen.

Sind die Verhältnisse arithmetisch, so entstehet auch eine arithmetische, sind sie geometrisch, eine geometrische Proportion.

Willkührlicher Satz.

§. 245. Das Zeichen der Proportion ist sehr verschieden. Einige bedienen sich des Zeichens der Gleichheit zwischen den Verhältnissen; andere hingegen nehmen drei Puncte bei den arithmetischen Proportionen, bei den geometrischen aber vier Puncte an.

Wir werden uns der erstern Art Zeichen bedienen, und so ist:

$3 - 7 = 9 - 13$ eine zunehmende } arithmetische Proportion.
$7 - 3 = 13 - 9$ „ abnehmende }
$3 : 12 = 9 : 36$ „ zunehmende } geometrische Proportion.
$12 : 3 = 36 : 9$ „ abnehmende }

Um

Um die allgemeine Form der Proportionen auszudrücken, benennen wir

das erste Glied = a,
= dritte = = b,
die Differenz = d,
den Exponenten = e; so ist

$a - (a + d) = b - (b + d)$ eine arithmetische, und
$a : ae = b : be$ eine geometrische Proportion.

Beide Proportionen werden aber gelesen: Wie sich verhält die erste Zahl zur zweiten, so verhält sich auch die dritte zur vierten.

Dieses will bei der arithmetischen so viel sagen:

Um wie viel Einheiten die erste Zahl größer oder kleiner ist, als die zweite; um eben so viel Einheiten ist auch die dritte größer oder kleiner als die vierte.

Bei der geometrischen Proportion heißt es: So viel mal die erste in der zweiten enthalten ist, so oft ist auch die dritte in der vierten enthalten.

§. 246. Jede Proportion bestehet, wie wir sehen, aus verschiedenen Gliedern, und heißt daher eine abgesonderte Proportion (Proportio discreta); allein, wenn in einer Proportion das hintere Glied des ersten Verhältnisses zugleich die Stelle des vordern Gliedes in dem zweiten Verhältnisse vertritt; so nennt man es eine zusammenhängende oder stäte Proportion (Proportio continua).

Einige drücken diese stäten Proportionen, wie die abgesonderten, durch vier Glieder, andere aber nur durch drei aus, und setzen vor die arithmetischen Propor-

portionen das Zeichen ÷, vor die geometrischen aber das Zeichen ÷.

Beide Arten aber können sowohl arithmetisch als geometrisch sein:

z. B. $8 - 12 = 12 - 16$ oder ÷ $8 - 12 - 16$	arithmet. zunehm.	stäte Proportionen.
$3 : 12 = 12 : 48$ oder ÷ $3 : 12 : 48$	geometr. zunehm.	
Frnr.: $16 - 12 = 12 - 8$ od. ÷ $16 - 12 - 8$	arithmet. abnehm.	
$48 : 12 = 12 : 3$ od. ÷ $48 : 12 : 3$	geometr. abnehm.	

Allgemein:

$a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$ od. ÷ $a-(a+d)-(a+2d)$	arithmet.	Proportionen.
$a : ae = ae : ae^2$ od. ÷ $a : ae : ae^2$	geometr.	

1. Zusatz.

§. 247. Man kann aber auch eine jede arithmetische oder geometrische Proportion allgemein so vorstellen:

$a - b = c - d$	arithmetische abgesond.	Proportionen.
$a - b = b - c$ oder ÷ $a - b - c$	. . stäte	
$a : b = c : d$	geometrische abgesond.	
$a : b = b : c$ oder ÷ $a : b : c$	. . stäte	

Diese Ausdrücke können in allen Fällen, statt jener, gesetzt werden, wenn man nur die gegebenen Begriffe damit verbindet.

2. Zusatz.

§. 148. Ist demnach die geometrische Proportion $a : b = c : d$, und man setzt $a = b$; so muß auch $c = d$ sein, das ist, die Exponenten $a : b$ und $c : d$ müssen in beiden Verhältnissen $= 1$ sein.

Oder, setzt man $a = c$, so muß auch $b = d$ sein, weil sonst

sonst die Exponenten a : b und c : d, oder die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, ungleich wären, und daher keine Proportion ausmachen könnten.

IV. Arithmetische Proportionen insbesondere.

Lehrsatz.

§. 249. In jeder arithmetischen abgesonderten Proportion ist die Summe der beiden äußern Glieder gleich der Summe der innern.

Beweis.

Eine arithmetische Proportion bestehet aus zwei gleichen arithmetischen Verhältnissen, d. h., aus solchen, die einerlei Differenz haben. (§. 244.) Wir wollen uns eine solche arithmetische Proportion allgemein vorstellen. Zum B. Es sei die arithmetische Proportion:

$$a - (a+d) = b - (b+d)$$

so ist $a + b + d = a + d + b$

In Zahlen:

$$4 - 10 = 7 - 13$$

so ist $\left\{\begin{matrix} 4 + 13 \\ 17 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 7 + 10 \\ 17 \end{matrix}\right\}$

Zusatz.

§. 250. In einer arithmetischen stäten Proportion (continua) ist demnach die Summe der beiden äußern Glieder gleich dem doppelten mittlern. Es sei die Proportion:

$$a - (a+d) = (a+d) - (a+2d)$$

so ist $2a + 2d = 2a + 2d$

oder $2a + 2d = (a + d)2$.

In Zahlen:

$$6 - 9 = 9 - 12$$

so ist $\left\{\begin{matrix} 6 + 12 \\ 18 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 9 + 9 \\ 18 \end{matrix}\right\}$

Lehrsatz.

§. 251. Wenn die Summe zweier Größen a+d und b+c gleich groß ist; so sind die beiden Theile der einen

einen Summe, zwischen den beiden Theilen der andern, mittlere arithmetische Proportionalgrößen.

Beweis.

Es sei $a - b = c - d$		
$a + d = b + c$		$2 + 8 = 4 + 6$
$b = b$	subtrah.	$4 = 4$
so ist $a + d - b = c$. §. 26.		$2 + 8 - 4 = 6$
$d = d$	subtrah.	$8 = 8$
so ist $a - b = c - d$.		$2 - 4 = 6 - 8$.

1. Zusatz.

§. 252. Man hat also zwei allgemeine Kennzeichen, vermittelst welcher die Richtigkeit einer jeden arithmetischen Proportion geprüft werden kann:

1) Die Gleichheit der Differenzen ihrer Verhältnisse. (§. 244.)

2) Die Gleichheit der Summen der äußern und mittlern Glieder.

2. Zusatz

§. 253. Aus §. 249. und 250. sehen wir, daß jede Proportion in eine Gleichung verwandelt, und folglich jedes unbekannte Glied gefunden werden kann, wie uns folgende Aufgaben zeigen werden.

Aufgabe.

§ 254. Zu drei gegebenen arithmetischen Proportionalgliedern das vierte zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man addire das zweite und dritte, und ziehe das erste davon ab, so zeigt der Rest die Größe des vierten Gliedes. (§. 249.) Z. B.

Es sei die abgesonderte Proportion:

$$a - (a + d) = b - x$$

so ist $a + x = (a + d) + b$ (§. 249.)

und $x = (a + d) + b - a = b + d$

also $a - (a + d) = b - (b + d)$ (§. 244.)

oder nach §. 247. allgemein:

$$a - b = c - x$$

so ist $a + x = b + c$.

und $x = b + c - a$.

In Zahlen:

$$4 - 10 = 7 - x$$

so ist $4 + x = 10 + 7$

und $x = 10 + 7 - 4 = 13$

folglich $4 - 10 = 7 - 13.$

Aufgabe.

§. 255. Das mittlere Glied in einer arithmetischen stäten Proportion zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man nehme die halbe Summe der äußern Glieder, so hat man das mittlere Glied. (§. 250.) Z. B.

Es sei die ståte Proportion (nach §. 247.)

$$a - x = x - b$$

so ist $a + b = 2x$

und $\frac{a + b}{2} = x.$

In Zahlen:

$$8 - x = x - 20$$

so ist $8 + 20 = 2x$

und $\frac{8 + 20}{2} = 14 = x$

folglich $8 - 14 = 14 - 20.$

1. Zusatz.

§. 256. Eben so findet man auch das dritte Proportionalglied, wenn man das mittelste Glied doppelt nimmt, und das erste davon subtrahiret. Z. B.

Es sei die ståte Proportion:

$$a - b = b - x$$

so ist $a + x = 2b$

und $x = 2b - a.$

In Zahlen:

$$8 - 14 = 14 - x$$

so ist $8 + x = 14 + 14 = 28$

und $x = 28 - 8 = 20.$

2. Zu-

2. Zusatz.

§. 257. Will man allgemeine Formeln für die Findung eines jeden unbekannten Proportionalgliedes, sowohl in einer abgesonderten, als stäten Proportion, haben; so sei:

1) $a - b = c - d$.
so ist $a + d = b + c$ nach dem Vorigen
und $d = b + c - a$ um das 4te Glied
" $a = b + c - d$ " " 1ste "
" $a + d - b = c$ " " 3te "
" $a + d - c = b$ " " 2te "
} zu finden.

2) Es sei $a - b = b - c$
so ist $a + c = 2b$ nach dem Vorigen
und $c = 2b - a$ um das 3te Glied
" $\frac{a + c}{2} = b$ " " mittlere
" $a = 2b - c$ " " 1ste "
} zu finden.

3. Zusatz.

§. 258. Diese Aufgabe kann in der Ausübung dann angewendet werden, wenn von einerlei Größe mehrere Werthe angegeben sind, und man einen mittlern Werth finden will. Z. B. Eine Flinte trägt, nach Versuchen, auf folgende Weiten:

Das erstemal 150 Schritte.
" 2te " 230 "
" 3te " 180 "
" 4te " 215 "

Die mittlere Schußweite ist also:

$$\frac{150 + 230 + 180 + 215}{4} = \frac{775}{4} = 193\tfrac{3}{4} \text{ Schritt.}$$

V. Geometrische Proportionen insbesondere.

Lehrsatz.

§. 259. In einer geometrischen abgesonderten Proportion (discreta) ist das Product der beiden äußern Glieder gleich dem Producte der beiden innern.

Beweis.

Beweis.

Eine geometrische Proportion bestehet aus zwei gleichen geometrischen Verhältnissen, welche also gleiche Exponenten haben (§. 244). Wir wollen uns eine solche geometrische Proportion allgemein vorstellen. Z. B. Es sei:

$$a : ae = b : be$$

$$\text{so ist} \quad abe = abe$$

In Zahlen:

$$6 : 12 = 9 : 18$$

$$\text{so ist} \left(\frac{6 \times 18}{108}\right) = \left(\frac{12 \times 9}{108}\right)$$

Anmerkung.

Die Anwendung dieses Lehrsatzes ist, in allen Fällen des gemeinen Lebens, von dem ausgebreitetsten Nutzen, und unter dem Namen der Regel de Tri bekannt, welcher eine Verstümmelung des lateinischen Namens: Regula de tribus terminis (datis) ist.

In der Folge werden wir noch ausführlicher von dieser Regel de Tri handeln.

Zusatz.

§. 260. In einer geometrischen stäten Proportion (continua) ist demnach das Product der beiden äußern Glieder gleich der Quadratzahl des mittlern Gliedes.

Es sei die Proportion:

$$a : ae = ae : ae^2$$

$$\text{so ist} \quad a^2e^2 = a^2e^2$$

In Zahlen:

$$8 : 24 = 24 : 72$$

$$\text{so ist} \left(\frac{8 \times 72}{576}\right) = \left(\frac{24 \times 24}{576}\right)$$

Lehrsatz.

§. 261. Wenn zwei Producte zweier Größen gleich sind; so sind die beiden Factoren des einen Productes mittlere Proportionalgrößen zwischen den beiden Factoren des andern Productes.

Beweis.

Beweis.

Es sei $a : b = c : d$
so ist $ad = bc$
durch $b = b$ divid.

so ist $\frac{ad}{b} = c$ (§. 40.)
durch $d = d$ divid.

also auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
oder auch $a : b = c : d$ (§. 248.)

In Zahlen:

$$4 \times 6 = 2 \times 12$$
$$2 = 2$$
$$\frac{4 \times 6}{2} = 12$$
$$6 = 6$$
$$\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$$
oder $4 : 2 = 12 : 6$

Zusatz.

§. 262. Eine Gleichung kann demnach in eine Proportion verwandelt werden, wenn man jede Seite in zwei Factoren zerlegt, und aus den Factoren der einen Seite die äußern Glieder, und aus den beiden Factoren der andern Seite die innern Glieder formirt. Z. B. Es sei:

$$ax - bx = mn$$
so ist $(a - b) \times x = mn$
und daher $(a - b) : m = n : x$
oder $(a - b) : n = m : x$

Man siehet hieraus, daß, wenn zwei Producte gleich sind, ihre Factoren in umgekehrter Ordnung stehen; das heißt: Der erste Factor des ersten Productes verhält sich zum ersten Factor des zweiten Productes, wie der zweite Factor des zweiten zum zweiten Factor des ersten Productes.

2. Zusatz.

§. 263. Daher geben zwei gleiche Producte, folglich auch zwei gleiche Brüche, in jedem Falle, eine geometrische Proportion.

3. Zusatz.

§. 264. Man hat also auch hier zwei Kennzeichen, vermittelst welcher man eine jede geometrische Proportion prüfen kann:

1) Die Gleichheit der Exponenten ihrer Verhältnisse, und:

2) Die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder.

Lehrsatz.

§. 265. Eine geometrische Proportion kann, in Absicht ihrer Glieder, auf verschiedene Art verwandelt werden, so daß, dessen ungeachtet, dieselben in Proportion verbleiben; welches man sogleich sehen kann, wenn das Product der beiden äußern Glieder dem Producte der beiden mittlern gleich bleibt. Hiervon haben wir hauptsächlich folgende Arten zu merken:

1) Durch Umkehrung der Glieder. Dieses heißt: umgekehrt (invertendo).

Beweis.

Es sei	Umgekehrt:
a : ae = b : be	ae : a = be : b
so ist abe = abe	so ist abe = abe (§. 259)
In Zahlen:	Umgekehrt:
3 : 9 = 4 : 12	9 : 3 = 12 : 4
so ist $\left(\begin{matrix}13\times 12\\36\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}9\times 4\\36\end{matrix}\right)$	so ist $\left(\begin{matrix}9\times 4\\36\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}3\times 12\\36\end{matrix}\right)$

2) Durch Verwechslung der Glieder. Dieses heißt: verwechselt (alternando).

Beweis.

Es sei	Verwechselt:
a : ae = b : be	a : b = ae : be
so ist abe = abe	so ist abe = abe (§. 259.)

In

In Zahlen:

$$3 : 9 = 4 : 12$$

so ist $\binom{3 \times 12}{36} = \binom{9 \times 4}{36}$

Verwechselt:

$$3 : 4 = 9 : 12$$

so ist $\binom{3 \times 12}{36} = \binom{4 \times 9}{36}$ (§. 259.)

Anmerkung.

Auf diese Art kann eine geometrische Proportion überhaupt achtmal versetzt werden; nämlich:

$$3 : 9 = 4 : 12$$
$$3 : 4 = 9 : 12$$
$$9 : 3 = 12 : 4$$
$$9 : 12 = 3 : 4$$
$$4 : 3 = 12 : 9$$
$$4 : 12 = 3 : 9$$
$$12 : 4 = 9 : 3$$
$$12 : 9 = 4 : 3$$

3) Durch Addition der Glieder (componendo).

Beweis.

Es sei:

1) $a : ae = b : be$
so ist $a + ae : a = b + be : b$
denn $ab + abe = ab + abe$ (§. 259.)

2) Wenn $a + ae : ae = b + be : be$
so ist $abe + abe^2 = abe + abe^2$ (§. 259.)

In Zahlen:

$$3 : 9 = 4 : 12$$

so ist $\binom{3+9}{12} : 3 = \binom{4+12}{16} : 4$

denn $\binom{12 \times 4}{48} = \binom{3 \times 16}{48}$ (§. 259.)

Ferner:

$$\underset{12}{3+9} : 9 = \underset{16}{4+12} : 12$$

denn $\underset{144}{12 \times 12} = \underset{144}{9 \times 16}$ (§. 259.)

4) Durch Subtraction der Glieder (subtrahendo).

Beweis.

Beweis.

1) Es sei $a : ae = b : be$
so ist $a - ae : a = b - be : b$
denn $ab - abe = ab - abe$ (§. 259.)

2) wenn $a - ae : ae = b - be : be$
so ist $abe - abe^2 = abe - abe^2$ (§. 259.)

z. B. $3 : 9 = 4 : 12$
so ist $\underbrace{9 - 3}_{6} : 3 = \underbrace{12 - 4}_{8} : 4$

denn $\left(\begin{matrix}6 \times 4\\ 24\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}3 \times 8\\ 24\end{matrix}\right)$ (§. 259.)

Ferner:

$\underbrace{9 - 3}_{6} : 9 = \underbrace{12 - 4}_{8} : 12$

denn $\left(\begin{matrix}6 \times 12\\ 72\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}9 \times 8\\ 72\end{matrix}\right)$ (§. 259.)

5) Durch Multiplication der Glieder.

Beweis.

$a : ae = b : be$
so ist $am : aem = bn : ben$
denn $ambne = aembn$ (§. 259.)

In Zahlen:

$3 : 9 = 4 : 12$
so ist $\left(\begin{matrix}3 \times 5\\ 15\end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix}9 \times 5\\ 45\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}4 \times 6\\ 24\end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix}12 \times 6\\ 72\end{matrix}\right)$
denn $\left(\begin{matrix}15 \times 72\\ 1080\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}45 \times 24\\ 1080\end{matrix}\right)$

6) Durch Division der Glieder.

Beweis.

$a : ae = b : be$
so ist $\frac{a}{m} : \frac{ae}{m} = \frac{b}{n} : \frac{be}{n}$
denn $\frac{abe}{mn} = \frac{aeb}{mn}$ (§. 259.)

In

In Zahlen:

$$3 : 9 = 4 : 12$$

so ist $\frac{3}{5} : \frac{9}{5} = \frac{4}{6} : \frac{12}{6}$

denn $\frac{36}{30} = \frac{36}{30}$

Zusatz.

§. 266. Eben so würde die Proportion bleiben, wenn man alle vier Glieder zu gleich hohen Potenzen erheben, oder gleichnamige Wurzeln ausziehen wollte.

Anmerkung.

Da sich jede Proportion, durch das Product der äußern und mittlern Glieder, in eine Gleichung verwandeln läßt; so kann auch nunmehr jedes unbekannte Glied gefunden werden, wie folgende Aufgaben zeigen.

1. Aufgabe.

§. 267. Zu drei gegebenen geometrischen Proportionalgliedern das vierte zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man dividire das Product der beiden mittlern Glieder durch das erste; so giebt der Quotient das vierte. Es sei die abgesonderte Proportion:

$$a : ae = b : x$$

so ist $ax = aeb$ (§. 259.)

und $x = \frac{aeb}{a} = be.$

oder nach §. 247. allgemein:

$$a : b = c : x$$

so ist $ax = bc$

und $x = \frac{bc}{a}.$

In Zahlen:

$$4 : 12 = 7 : x$$

so ist $4x = 12 \times 7$

und $x = \frac{12 \times 7}{4} = \frac{84}{4} = 21$

folglich $4 : 12 = 7 : 21.$

2. Auf-

2. Aufgabe.

§. 268. Das mittlere Glied in einer stäten geometrischen Proportion zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man ziehe aus dem Producte der beiden äußern die Quadratwurzel; so hat man das Verlangte.

Es sei die stäte Proportion:

$$a : x = x : b$$

so ist $ab = x^2$

und $\sqrt{ab} = x.$

In Zahlen:

$$8 : x = x : 648$$

so ist $8 \times 648 = x^2$

und $\sqrt{8 \times 648} = 72 = x$

folglich $8 : 72 = 72 : 648.$

1. Zusatz.

§. 269. So findet man auch das dritte Proportionalglied, wenn man das mittelste zum Quadrat erhebt, und durch das erste dividiret. Z. B. Es sei die stäte Proportion

$$a : b = b : x$$

so ist $ax = b^2$

und $x = \frac{b^2}{a}.$

In Zahlen:

$$8 : 72 = 72 : x$$

so ist $8x = 72 \times 72$

und $x = \frac{72 \times 72}{8} = 648$

2. Zusatz.

§. 270. Um überhaupt jedes unbekannte Proportionalglied, sowohl in einer abgesonderten als stäten Proportion, zu finden, dienen folgende allgemeine Formeln. Es sei:

1) a :

1) $a : b = c : d$

so ist $ad = bc$ (§. 259.)

und $d = \frac{bc}{a}$ um das 4te Glied ⎫
und $a = \frac{bc}{d}$ . . 1ste . ⎪
und $\frac{ad}{b} = c$ . . 3te . ⎬ zu finden.
und $\frac{ad}{c} = b$ . . 2te . ⎭

2) $a : b = b : c$

so ist $ac = b^2$

und $\frac{b^2}{a} = c$ um das 3te Glied ⎫
und $\sqrt{ac} = b$ . . mittlere ⎬ zu finden.
und $a = \frac{b^2}{c}$ . . 1ste . ⎭

Lehrsatz.

§. 271. Zwei Verhältnisse, sowohl arithmetische als geometrische, die einem dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.

Beweis.

Da dieser Satz der §. 11. angeführte allgemeine Grundsatz ist; so ist der Beweis von selbst einleuchtend.

Es sei $a : b = c : d$
und $e : f = c : d$

so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

und $\frac{f}{e} = \frac{d}{c}$

folglich $\frac{b}{a} = \frac{f}{e}$ (§. 11.)

Lehrsatz.

§. 272. Wenn die Glieder eines geometrischen Verhältnisses durch einerlei Zahl multipliciret oder dividiret werden; so verhalten sich, im ersten Falle, die Producte wie die multiplicirten, und, im zweiten Falle, die Quotienten wie die dividirten Größen.

Beweis.

1) Es sei $(a : b) \times c$;
so ist $ac : bc = a : b$
denn $abc = abc$ (§. 259.)

In Zahlen:

Es sei $(2 : 6) \times 4$;
so ist $8 : 24 = 2 : 6$
denn $\left(\begin{matrix} 8 \times 6 \\ 48 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 24 \times 2 \\ 48 \end{matrix}\right)$ (§. 259.)

2) Es sei $(a : b) : c$;
so ist $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = a : b$
denn $\frac{abc}{c} = \frac{abc}{c}$ (§. 259.)

In Zahlen:

$(12 : 36) : 4$
so ist $3 : 9 = 12 : 36$
denn $\left(\begin{matrix} 3 \times 36 \\ 108 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 9 \times 12 \\ 108 \end{matrix}\right)$ (§. 259.)

Zusatz.

§. 273. Da ein jedes geometrisches Verhältniß als ein Bruch angesehen werden kann (§. 241.); so folgt aus diesem Lehrsatze noch, als Erläuterung der Lehre vom Aufheben der Brüche:

1) Daß ein Bruch in seinem Werthe nicht verändert wird, wenn man Zähler und Nenner durch eine dritte Zahl multipliciret oder dividiret.

2) Daß

2) Daß man nun auch jeden Bruch auf einen andern gegebenen Nenner setzen kann, wenn man nämlich zu dem bekannten Nenner und Zähler des gegebenen Bruches, und zu dem gegebenen Nenner, die vierte Proportionalzahl sucht (§. 267.). Z. B. Es sei $\frac{2}{3}$ auf einen Bruch zu setzen, davon der Nenner 12 sei;

$$\text{so ist } 3 : 2 = 12 : x$$

$$\text{und } x = \frac{2 \times 12}{3} = 8$$

$$\text{und } \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{12}.$$

Anmerkung.

Hierauf gründet sich eigentlich das Aufheben der in Proportion stehenden Größen, welches bei der Regel de Tri mit Vortheil angewendet wird.

Erklärung.

§. 274. Ein jedes Verhältniß wird gerade (directa) genannt, wenn das vordere und hintere Glied ungeändert an ihrer Stelle gelassen werden. Werden aber die Glieder umgekehrt; so entstehet ein umgekehrtes Verhältniß (inversa, reciproca).

Z. B. Man setze die beiden Brüche: $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$, und das Verhältniß ihrer Nenner 4 : 8; so ist $\frac{3}{4} : \frac{3}{8} = 8 : 4$, das ist, diese beiden Brüche verhalten sich umgekehrt, wie ihre Nenner.

VI. Zusammensetzung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen.

Erklärungen.

§. 275. Wenn man die gleichnamigen Glieder zweier oder mehrerer geometrischen Verhältnisse mit einander multipliciret; so heißt das Verhältniß solcher Producte aus den einzelnen Verhältnissen der Factoren: ein zusammengesetztes Verhältniß. Z. B.

a : b

$$\begin{array}{r} a : b \\ c : d \\ e : f \\ \hline \text{so ist } ace : bdf \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 \\ 2 : 4 \\ 3 \\ 3 : 9 \\ 4 \\ 6 : 24 \\ \hline \left\{ \begin{array}{c} 2 \times 3 \times 6 \\ 36 \end{array} \right\} : 24 : \left\{ \begin{array}{c} 4 \times 9 \times 24 \\ 864 \end{array} \right\} \end{array}$$

§. 276. Sind diese einzelnen Verhältnisse einander gleich; so heißt das zusammengesetzte ein höheres oder multiplicirtes Verhältniß; und zwar ein duplirtes oder quadratisches, wenn es aus zwei gleichen, ein triplirtes oder cubisches aber, wenn es aus drei gleichen Verhältnissen bestehet. Die einfachen Verhältnisse heißen dann: subduplirte und subtriplirte Verhältnisse. Z. B.

$$\left.\begin{array}{lcl} a : b & \text{oder} & \overset{(2)}{2 : 4} \\ a : b & & \overset{(2)}{3 : 6} \\ \hline a^2 : b^2 & = & 6 : 24 \text{ ein quadratisches} \\ a : b & & \overset{(2)}{4 : 8} \\ \hline a^3 : b^3 & = & 24 : 192 \text{ ein cubisches} \end{array}\right\} \text{zusammengesetztes Verhältniß.}$$

Wenn Ruthe	:	Fuß	=	10 : 1
Fuß	:	Zoll		10 : 1
Zoll	:	Linie		10 : 1
Linie	:	Scrupel		10 : 1;

so ist das Verhältniß der Ruthe zum Scrupel zusammengesetzt aus den einfachen Verhältnissen 10:1, 10:1, 10:1, 10:1.

1. Anmerkung.

Die Kettenregel ist eine solche Zusammensetzung der Verhältnisse.

2. Anmerkung.

Die Anwendung der quadratischen und cubischen Verhältnisse kommt in der Geometrie bei der Bestimmung der Verhältnisse der

Flächen

Flächen und körperlichen Inhalte gegen einander vor, und wird diese Benennungen dann rechtfertigen.

Zusatz.

§. 277. Weil ein Verhältniß nicht geändert wird, (§. 273.), wenn man die Glieder durch einerlei Zahl dividiret; so kann man auch die Glieder eines zusammengesetzten Verhältnisses mit einerlei Zahl, wenn es nämlich ohne Rest geschehen kann, dividiren, und die Zahlenrechnung in manchen Fällen abkürzen.

Anmerkung.

Hiervon werden wir in der Folge sehr nützliche Anwendungen machen.

Lehrsatz.

§. 278. Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnisses ist dem Producte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse gleich.

Beweis.

Es sei $a:b$, $c:d$ und $e:f = ace:bdf$. Wenn nun $\frac{b}{a} = m$, $\frac{d}{c} = n$, $\frac{f}{e} = o$; so hat man, weil $b = am$, $d = cn$, $f = eo$, anstatt $ace:bdf$, das eben so große Verhältniß $ace:amcneo$, dessen Exponent mno ist, weil $\frac{amcneo}{ace} = mno$ ist.

In Zahlen:

Es sei $2:4$, $3:9$, $4:12$, so ist

$$\binom{2\times3\times4}{24} : \binom{4\times9\times12}{432}$$

nun ist das Product der Exponenten $2\times3\times3=18=$ dem (18) Exponenten von $24:432$.

Zusatz.

§. 279. Ist das zusammengesetzte Verhältniß ein quadratisches; so ist der Exponent ebenfalls die zweite Potenz, und so ist auch, bei dem cubischen, der Exponent die dritte Potenz rc. von dem Exponenten des einfachen Verhältnisses.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 280. Zwei Proportionen von einerlei Exponenten geben, wenn man die Glieder nach einerlei Ordnung addirt oder subtrahirt, eine neue Proportion von eben demselben Exponenten.

Beweis.

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Es sei} & a & : & ae & = & b & : & be \\ \text{und} & c & : & ce & = & d & : & de \\ \hline \text{so ist} & a\pm c & : & ae\pm ce & = & b\pm d & : & be\pm de \\ \text{das ist} & a+c & : & (a+c)e & = & b+d & : & (b+d)e \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \text{Ist daher} & a : b & = & p : q \\ & c : d & = & p : q \\ & e : f & = & p : q \end{array}$$

$$\text{so ist } (a+c+e) : (b+d+f) = 3p : 3q = p : q.$$

In Zahlen:

$$\begin{array}{rccccccc} & 2 & : & 4 & = & 3 & : & 6 \\ & 5 & : & 10 & = & 6 & : & 12 \\ \hline & 2\pm 5 & : & 4\pm 10 & = & 3\pm 6 & : & 6\pm 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Ist daher} & 2 & : & 4 & = & 1 & : & 2 \\ & 3 & : & 6 & = & 1 & : & 2 \\ & 5 & : & 10 & = & 1 & : & 2 \\ \hline & 2+3+5 & : & 4+6+10 & = & 1\times 3 & : & 2\times 3 : 1 : 2 \\ & 10 & : & 20 & = & 1 & : & 2. \end{array}$$

Lehrsatz.

§. 281. Wenn man die gleichnamigen Glieder zweier Proportionen von gleichen oder verschiedenen Exponenten mit einander multipliciret oder dividiret; so ist die Proportion dieser Producte oder Quotienten eine zusammengesetzte Proportion.

Beweis.

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Es sei} & a & : & ae & = & b & : & be \\ & c & : & cE & = & d & : & dE \\ \text{so ist} & ac & : & aceE & = & bd & : & bdeE, \text{ weil} \end{array}$$

$$\frac{aceE}{ac} = \frac{bdeE}{bd} = eE.$$

Auch

Auch ist $\frac{a}{c} : \frac{ac}{cE} = \frac{b}{d} : \frac{be}{dE}$

weil $\frac{ae}{cE} \times \frac{c}{a} = \frac{be}{dE} \times \frac{d}{b} = \frac{e}{E}$

In Zahlen:

$$\begin{array}{lcccccccc} & 6 & \overset{2}{:} & 12 & = & 10 & \overset{2}{:} & 20 \\ \text{und} & 3 & \overset{3}{:} & 9 & = & 5 & \overset{3}{:} & 15 \\ \hline & 18 & \overset{6}{:} & 108 & = & 50 & \overset{6}{:} & 300 \\ \text{und} & 18 & \times & 300 & = & 108 & \times & 500 \end{array}$$ (§. 259.).

Ferner: $\frac{6}{3} : \frac{12}{9} = \frac{10}{5} : \frac{20}{15}$

denn $\frac{6}{3} \times \frac{20}{15} = \frac{12}{9} \times \frac{10}{5}$

Lehrsatz.

§. 282. Wenn mehrere Größen in einer geometrischen Proportion stehen; so verhält sich die Summe der Antecedenten zur Summe der Consequenten, wie ein jeder Antecedent zu seinem Consequenten.

Beweis.

Wenn $a : b = c : d = e : f$, so ist, nach dem Lehrsatze: $a + c + e : b + d + f = a : b$, und mithin muß $ab + bc + be = ab + ad + af$ sein.

Es sei $a : b = c : d$

so ist $ad = bc$ (§. 259.)

ferner ist $a : b = e : f$

so ist $af = be$ (§. 259.)

und da $ab = ab$ ist, so ist auch

$ab + bc + be = ab + ad + af$.

In Zahlen:

Ist $2 : 6 = 4 : 12 = 8 : 24$, so ist, nach dem Lehrsatze:

$$(\underbrace{2 + 4 + 8}_{14}) : (\underbrace{6 + 12 + 24}_{42}) = 2 : 6$$

denn $$(\underbrace{14 \times 6}_{84}) = (\underbrace{42 \times 2}_{84})$$

Anmer=

Anmerkung.

Dieser Lehrsatz kommt bei der Gesellschaftsrechnung in Anwendung.

Zweites Kapitel.

Von den Progressionen.

I. Arithmetische Progressionen.

Erklärung.

§. 283. Wenn eine Reihe Größen oder Zahlen in einer stäten arithmetischen Proportion fortgehen; so entstehet eine arithmetische Reihe oder Progression, welche ebenfalls zunehmend oder abnehmend sein kann. Die Differenz der Verhältnisse wird die Differenz der Progression genannt, so wie die Glieder der Verhältnisse die Glieder der Progression heißen.

Die Anzahl der Glieder einer Progression wird, vermittelst gewöhnlicher oder römischer Zahlzeichen über denselben angegeben, und diese Zahlen nennt man die Zeiger oder die Anzeiger.

Zeiger I II III IV V VI VII VIII IX X XI.
so ist ÷ 3-5-7-9-11-13-15-17-19-21-23, eine zunehm.
÷ 23-21-19-17-15-13-11-9-7-5-3, „ abnehm.
arithm. Progr.

Lehrsatz.

§. 284. In jedem Gliede einer arithmetischen Progression ist die Differenz so vielmal zu dem ersten Gliede addirt, oder von demselben subtrahirt, als die Anzahl der Glieder weniger Eins beträgt.

Beweis.

Da bei einer zunehmenden arithmetischen Progression das folgende Glied allezeit aus dem vorhergehenden + der Differenz, und bei der abnehmenden — der Differenz bestehet;

het (§. 243.); so kann man dieselbe nach folgender Formel vorstellen:

Zeiger I. II. III. IV. V. VI.

$$a-(a\pm d)-(a\pm 2d)-(a\pm 3d)-(a\pm 4d)-(a\pm 5d)\text{ ꝛc.}$$

Man siehet, daß z. B. das 6ste Glied in der wachsenden Progression aus dem ersten + der Differenz 5mal genommen, also überhaupt als die Anzahl der Glieder weniger Eins beträgt, bestehet; bei der abnehmenden aber — der Differenz 5mal genommen, also überhaupt so viel mal genommen, als die Anzahl der Glieder, weniger Eins, beträgt, bestehet.

1. Zusatz.

§. 285. Hieraus siehet man, daß man das letzte Glied in einer wachsenden arithmetischen Progression finden kann, wenn man die Differenz mit der Anzahl der Glieder, weniger Eins, multipliciret, und zu dem Producte das erste Glied addiret, bei einer abnehmenden subtrahiret.

Ist das erste Glied $= a$
die Differenz der Progression $= d$
die Anzahl der Glieder $= n$
das letzte Glied $= u$;

so ist die allgemeine Formel zur Findung des letzten Gliedes: $u = a \pm (n-1)\, d$.

In Zahlen:

Es sei das erste Glied $= 3$
die Differenz $= 2$
die Anzahl der Glieder $= 11$;

so ist $u = 3 + 10 \times 2 = 3 + 20 = 23$.

2. Zusatz.

§. 286. Wenn man die Gleichung $a + (n-1)\, d = u$ auf d reduciret; so hat man $\frac{u-a}{n-1} = d$. Will man also die Differenz in einer arithmetischen Progression finden; so muß man den Unterschied des ersten und letzten Gliedes durch die Anzahl der Glieder, weniger Eins, dividiren.

Es sei das erste Glied $= 3$
» » » letzte Glied $= 23$
die Anzahl der Glieder $= 11$;

so ist $d = \frac{(23-3)}{10} = 2$.

3. Zu-

3. Zusatz.

§. 287. Will man zwischen zwei gegebenen Zahlen mehrere mittlere finden; so darf man also nur die Differenz der Progression, nach dem vorigen §., suchen, und diese zu jedem vorhergehenden Gliede addiren; so erhält man das folgende Glied. Z. B. zwischen 3 und 23 sollen 9 mittlere Proportionalzahlen gefunden werden, so ist, nach vorigem §.,

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
÷	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

4. Zusatz.

§. 288. Reduciret man die Formel $a + (n-1)d = u$ auf $n-1$; so erhält man $\frac{u-a}{d} + 1 = n$ und folglich erhält man die Anzahl der Glieder in einer arithmetischen Progression, wenn man den Unterschied des ersten und letzten Gliedes durch die Differenz der Progression dividirt, und Eins dazu addiret.

Es sei das erste Glied = 3
" " die Differenz = 2
" " das letzte Glied = 23;
so ist $n = \frac{23-3}{2} + 1 = 11$.

5. Zusatz.

§. 289. Reduciret man ferner die Formel $a+(n-1)d = u$ auf a; so erhält man $a = u - (n-1)d$, und folglich das erste Glied, wenn man die Differenz mit der Anzahl der Glieder weniger Eins multiplicirt, und von dem letzten Gliede subtrahirt.

Es sei das letzte Glied = 23
" " die Differenz = 2
" " " Anz. d. Glied. = 12;
so ist $a = 23 - 10 \times 2 = 3$.

Lehrsatz.

§. 290. In jeder arithmetischen Progression ist die Summe der äußersten Glieder allezeit der Summe der beiden gleich, die von den äußersten gleichweit entfernet sind, oder, bei einer ungeraden Anzahl, dem mittelsten Gliede, doppelt genommen, gleich.

Beweis.

Beweis.

$$\overset{\text{I.}}{\text{Wenn } a} - \overset{\text{II.}}{(a+d)} - \overset{\text{III.}}{(a+2d)} - \overset{\text{IV.}}{(a+3d)} - \overset{\text{V.}}{(a+4d)}$$

$$\text{I.} + \text{V.}$$

$$\text{so ist } a + a + 4d = 2a + 4d$$

$$\text{II.} + \text{IV.}$$

$$a + d + a + 3d = 2a + 4d$$

$$\text{III.}$$

$$a + 2d \times 2 = 2a + 4d$$

In Zahlen:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
∸ 3 -	5 -	7 -	9 -	11 -	13 -	15 -	17 -	19 -	21 -	23.
					13	11	9	7	5	3
				so ist	26 =	26 =	26 =	26 =	26 =	26.

Zusatz.

§. 291. Man bekommt also die Summe der ganzen Progression, wenn man die Summe der beiden äußern Glieder mit der halben Anzahl der Glieder, oder die halbe Summe der beiden äußern Glieder mit der ganzen Anzahl derselben multiplicirt.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so darf man also nur die halbe Summe der äußern Glieder, oder, welches einerlei ist, das mittlere Glied mit der Anzahl der Glieder multipliciren.

Ist das erste Glied = a
" " letzte " = u
die Anzahl der Glieder = n
die Summe der Progression = s;

so ist die allgemeine Formel $(a+u)\frac{n}{2} = s$, oder $\left(\frac{a+u}{2}\right)n$

In Zahlen:

das erste Glied = 3
" letzte " = 23
die Anzahl der Glieder = 11;

so ist, nach obiger Formel, $\frac{3+23}{2} \times 11 = 143 = s$.

Beispiele zur Uebung.

I. Bei einer Belagerung wurden, in einer Nacht, von einer Batterie 3 Bomben, von einer andern 7, von einer dritten 11, von der letztern aber 31 Bomben geworfen. Wie viel sind nun Batterien gewesen, und wie viel Bomben sind überhaupt geworfen worden?

Es ist hier das erste Glied $= 3$
die Differenz $= 4$
das letzte Glied $= 31$;

so ist nun die Anzahl der Glieder zu finden, nach vorhergehendem §., $\frac{u - a}{d} + 1 = n = \frac{31 - 3}{4} + 1 = \frac{28}{4} + 1$ $= 7 + 1 = 8$ Glieder, folglich 8 Batterien.

Um die Summe der Progression zu finden, so ist (§. 291.) $(a + u)\frac{n}{2} = s = (3 + 31) \times 4 = 136$ Bomben.

II. Haben 8 Rotten Sappeurs ihre Arbeit also verrichtet: Die erste Rotte hat 2 Klaftern, die zweite eine gewisse Anzahl mehr als die erste gemacht, bis auf die letzte Rotte, welche 30 Klaftern gefertiget hat. Wie viel hat nun jede Rotte Klaftern gefertiget, und wie viel sind überhaupt gefertiget worden?

Es ist hier das erste Glied $= 2$
. . . . letzte . $= 30$
die Anzahl der Glieder $= 8$;

so ist nun, nach §. 286., die Differenz der Progression zu finden, $\frac{a - u}{n - 1} = d = \frac{2 - 30}{7} = 4 =$ der Differenz.

Um die Summe der Klaftern = der Summe der Progression zu finden; so ist (§. 291.) $(a + u)\frac{n}{2} = s =$ $(30 + 2)\ 4 = 128$ Klaftern, und die Progression ist

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII.
2 — 6 — 10 — 14 — 18 — 22 — 26 — 30; folglich hat die zweite Rotte 6 Klaftern, die dritte 10 Klaftern, und so fort, gefertiget.

III. Einem Mineur wurde, nachdem er einen Minengang 12 Fuß weit getrieben, für den letzten 2 Thlr., für jeden

jeden der vorhergehenden aber 4 gr. weniger bezahlt; wie hoch ist nun der erste Fuß bezahlt worden?

Nach der Formel in §. 285., $u - (n-1)\,d = a$, 48 gr. — 44 = 4 gr. = a.

IV. Wie viel Geld muß man einem Sappeur für den 6sten von ihm gesetzten Schanzkorb bezahlen, wenn er in einer Belagerung für den ersten 1 Gulden, und für jeden folgenden 3 Gulden mehr erhält?

Nach der Formel in §. 285. $a + (n-1)\,d = u$ ist $1 + (6-1) \times 3 = 16$ Gulden.

Anmerkung.

Es ist hier der Ort, noch etwas von den Polygonal- oder viereckigen, oder auch figurirten, Zahlen zu sagen. Sie entstehen, wenn man die Glieder einer arithmetischen Progression, welche sich mit der Einheit anfängt, summirt, und werden, nachdem die Differenz der Progression 1, 2, 3 ꝛc. ist, drei- vier- fünfeckige Zahlen genannt, so daß die Differenz der Progression, woraus die Polygonalzahl entstehet, jedesmal um zwei Einheiten kleiner ist, als die Zahl der Ecken, wornach die Polygonalzahl genannt wird. Die Anzahl der Glieder einer solchen Progression, deren Summe eine Polygonalzahl giebt, wird die Seite dieser Polygonalzahl genannt. Die Anwendung derselben kommt in der Artilleriewissenschaft, bei der Lehre von der Berechnung der Kugelhaufen, vor. Der Zweck dieses Lehrbuches erlaubt es nicht, diese Art Zahlen weiter auszuführen.

II. Geometrische Progressionen.

Erklärung.

§. 292. Wenn eine Reihe Größen oder Zahlen in einer stäten geometrischen Proportion fortgehen; so entstehet eine geometrische Reihe oder Progression, welche ebenfalls zu- oder abnehmend sein kann. Der Exponent der Verhältnisse wird hier der Exponent der Progression genannt. Die Glieder der Verhältnisse heißen ebenfalls Glieder der Progression. So ist z. B.

	1	2	3	4	5	6	7		Geom. Progr.
÷÷	2:	4:	8:	16:	32:	64:	128,	eine zunehm.	Geom. Progr.
÷÷	128:	64:	32:	16:	8:	4:	2,	- abnehm.	Geom. Progr.

Lehrsatz.

§. 293. In einer geometrischen Progression ist jedes Glied gleich dem ersten Gliede, so oft durch den Exponenten multipliciret, oder durch selbigen dividiret, als die Anzahl der Glieder, weniger Eins, beträgt.

Beweis.

Da, bei einer zunehmenden geometrischen Progression, das folgende Glied allezeit aus dem vorhergehenden, multiplicirt mit dem Exponenten, bestehet; so kann man sie folgendermaßen vorstellen:

$$\begin{matrix} \text{I.} & & \text{II.} & & \text{III.} & & \text{IV.} & & \text{V.} & & \text{VI.} & \\ a & : & ae & : & ae^2 & : & ae^3 & : & ae^4 & : & ae^5 & : \text{ꝛc.} \\ \frac{a}{e^5} & : & \frac{a}{e^4} & : & \frac{a}{e^3} & : & \frac{a}{e^2} & : & \frac{a}{e} & : & a. & \end{matrix}$$

Woraus man siehet, daß, bei der zunehmenden Progression, das letzte Glied, z. B. hier das VI. ae^5, aus dem ersten multiplicirt durch den Exponenten, zu einer solchen Potenz gebracht, und in der abnehmenden, dividirt durch den Exponenten, zu einer solchen Potenz gebracht, als die Anzahl der Glieder, weniger Eins, beträgt, bestehet.

Zusatz.

§. 294. Um das letzte Glied in einer geometrischen Progression zu finden, darf man also nur den Exponenten zu einer solchen Potenz erheben, als die Zahl der Glieder, weniger Eins, beträgt, und bei der zunehmenden mit dem ersten Gliede multipliciren, bei der abnehmenden aber dividiren. Ist das erste Glied $= a$

der Exponent $= e$

die Anzahl der Glieder $= n$

das letzte Glied $= u$;

so ist die allgemeine Formel zu Findung des letzten Gliedes in einer zunehmenden Progression, $e^{n-1} \times a = u$; bei einer abnehmenden aber $\frac{a}{e^{n-1}} = u$.

In Zahlen:

Es sei das erste Glied $= 2$

- - der Exponent $= 2$

die Anzahl der Glieder $= 7$

so ist $2^{7-1} \times 2 = 64 \times 2 = 128 = u$. (§. 293.)

Anmerkung.

Eine weitere Ausdehnung der geometrischen Progressionen schien mir für den Militair nicht besonders nöthig.

Sechs-

Sechster Abschnitt.
Von den Logarithmen.

Erstes Kapitel.
Von der Einrichtung der Logarithmen.

Erklärungen.

§. 295. Wenn man mit einer geometrischen Progression, die mit 1 anfängt, deren Exponent a ist, eine arithmetische, die mit 0 anfängt und 1 zur Differenz hat, verbindet; so zeigt jedes Glied der arithmetischen Progression, durch seine Einheiten, nicht allein die Anzahl der Verhältnisse in der geometrischen Progression, vom ersten Gliede an gerechnet, sondern auch die Größe des Verhältnisses, welches ein jedes Glied in der nämlichen Progression zum ersten hat.

Daher nennt man die Zähler der arithmetischen Progression: die Logarithmen (Zahlen der Verhältnisse) der über denselben stehenden Glieder in der geometrischen Progression. Da nun das erste Glied in der geometrischen Progression 1 ist; so sagt man auch kurz: Die Glieder der arithmetischen Progression sind die Logarithmen der Zahlen in der geometrischen Progression, unter welchen sie stehen. Z. B.

Geometrische Progr. $1 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 \ldots\ldots a^m : a^n$

arithmetische = $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 \ldots\ldots m - n.$

Hier-

Hieraus siehet man, daß die Zahlen der arithmetischen Progression mit den Exponenten der Potenzen in der geometrischen Progression einerlei sind, und so sind diese Exponenten zugleich die Logarithmen ihrer Potenzen.

Zusatz.

§. 296. Setzt man statt a eine Zahl, z. B. 2; so erhält man die Größe der Glieder in der geometrischen Progression in Zahlen ausgedrückt, und die dazu gehörigen Logarithmen, in der damit verbundenen arithmetischen Progression.

Geometr. Progr.	1 :	2 :	4 :	8 :	16 :	32 :	64 :	128 :	256 :	512
Arithmet.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9 rc.

Setzt man statt a die Zahl 4; so erhält man eine andere Progression, mit den vorigen Logarithmen.

Geometr. Progr.	1 :	4 :	16 :	64 :	256 :	1024 :	4096 :	16384 rc.
Arithmet.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7 rc.

§. 297. Den Logarithmen einer Größe bezeichnet man gewöhnlich mit Log. (Log.), oder kürzer, mit L. (L.); so ist z. B. 4 der Log. von 16; oder auch 4 der L. von 256, 6 der Log. von 64 oder 4096, 3 der Log. von a^3.

§. 298. Jede Reihe von Logarithmen, mit einer bestimmten geometrischen Progression verbunden, macht ein logarithmisches System aus.

Die Zahl oder Größe in der geometrischen Progression, deren Log. = 1 ist, heißt die Basis oder Grundzahl des Systems, und das Verhältniß dieser Zahl zur Einheit, das Fundamentalverhältniß. In §. 296. ist also 2 die Basis, und das Fundamentalverhältniß 2 : 1, und im zweiten Falle ist 4 die Basis, und das Fundamentalverhältniß 4 : 1. In §. 295. a : 1.

Lehrsatz.

§. 299. In jedem logarithmischen Systeme ist der Logarithme eines Productes der Summe der Logarithmen der Factoren gleich.

Beweis.

Beweis.

Wenn man in dem oben (§. 295.) angeführten logarithmischen Systeme zwei Glieder, z. B. a^2 mit a^3, multiplicirt; so ist das Product a^5 (§. 165. No. 2.). Nun ist aber 2 der Log. von a^2 und 3 der Log. von a^3; folglich $2+3 = 5$ der Log. von a^5.

Beispiel in Zahlen.

$16 \times 1024 = 16384$.

Nun ist 5 der Log. von 1024
und 2 . . . 16
so ist 7 der Log. von 16384.

Zusatz.

§. 300. Wenn also eine Potenz zu einer andern erhoben werden soll; so giebt die Multiplication des Exponenten mit 2, das Quadrat mit 3 aber den Cubus rc.; denn das Quadrat von $a^3 = a^6$, weil $aaa \times aaa = aaaaaa = a^6$ ist rc.

In Zahlen ist $16^2 = 256$; nun ist der Log. von $16 = 2 \times 2 = 4$; als der Log. von 256.

Ferner: $16^3 = 4096$. Nun ist der Log. von $16 = 2 \times 3 = 6$, als der Log. von 4096.

Lehrsatz.

§. 301. Der Logarithme eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividendus subtrahirt.

Beweis.

Wenn man Potenzen dividiren will, darf man nur ihre Exponenten subtrahiren (§. 165. No. 2.), und die Differenz ist der Exponent des Quotienten; folglich, wenn wir, in der oben angeführten geometrischen Progression, a^5 durch a^2 dividiren, so ist der Quotient a^3. Nun ist aber 5 der Log. von a^5, und 2 der Log. von a^2, und $5-2=3$ der Log. von a^3.

Beispiel in Zahlen.

$$\frac{16384}{1024} = 16.$$

Nun ist 7 der Log. von 16384
und 5 . . . 1024
so ist 2 der Log. von 16.

1. Zu-

1. Zusatz.

§. 302. Wenn also aus einer Potenz die Wurzel gezogen werden soll; so giebt die Division des Exponenten durch 2 die Quadratwurzel, durch 3 aber die Cubikwurzel etc.; denn $\sqrt{a^6} = a^3$, weil $\sqrt{aaaaaa} = \frac{aaaaaa}{aaa} = a^3$.

In Zahlen:

ist $\sqrt{256} = 16$. Nun ist Log. von $256 = 4$ und $4 : 2 = 2$, als der Log. von der Wurzel 16.

2. Zusatz.

§. 303. Man siehet hieraus, daß, in einem jeden logarithmischen Systeme, sich die Multiplication in eine bloße Addition, die Division aber in eine Subtraction, die Erhebung zu Potenzen in eine Multiplication, und das Extrahiren in eine Division verwandelt.

3. Zusatz.

§. 304. Da ein Bruch der Ausdruck einer Division ist, wo der Zähler den Dividendus, der Nenner aber den Divisor vorstellet; so erhält man also den Logarithmen eines Bruches, wenn man den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abziehet.

Willkührlicher Satz.

§. 305. Um den Logarithmen für eine jede Zahl zu bestimmen, hat man ein System angenommen, dessen Basis $= 10$, das Fundamentalverhältniß $10 : 1$ und der Logarithme davon $= 1$ ist, und das **gemeine logarithmische System** genannt wird; als:

$$÷÷\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 \text{ etc.}$$
$$÷\ 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6 \text{ etc.}$$

Hier nehmen die Logarithmen um eine Einheit zu, wenn die Glieder der geometrischen Progression um eine 0 wachsen, oder, welches einerlei ist, mit 10 multipliciret werden, und ein jeder Logarithme bestehet also aus so viel Einheiten, als die Glieder der geometrischen Progression Nullen bei sich führen.

Ein=

Einrichtung der logarithmischen Tafel.

§. 306. Da es zu dem eigentlichen Endzwecke wenig nützen würde, wenn man blos zu den vorgemeldeten Gliedern der geometrischen Progression, nicht aber auch zu den dazwischen fallenden natürlichen Zahlen die Logarithmen hätte, diese Zahlen aber in keiner geometrischen Progression stehen; so hat man, zu Bestimmung ihrer Logarithmen, sich folgenden Mittels bedienet:

Erstlich hat man, sowohl an die Glieder der geometrischen Progression, als auch an ihre Logarithmen, eine gewisse Anzahl Nullen, z. B. hier 7, gehängt, das heißt, solche auf einen Decimalbruch gesetzt, um die dazwischen fallenden Zahlen desto richtiger zu bekommen, besonders, da die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100 ꝛc. nichts anders als Brüche, oder mit Brüchen verbunden, sein können, wodurch sie folgende Gestalt erhalten.

Proportionalzahlen.	Logarithmen.
1,0000000	0,0000000
10,0000000	1,0000000
100,0000000	2,0000000
1000,0000000	3,0000000
10000,0000000	4,0000000 ꝛc.

Hierauf hat man zwischen den zwei Zahlen, 1 und 10, so lange mittlere geometrische Proportionalzahlen gesucht, bis selbige, so genau als möglich, mit den natürlichen Zahlen, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9, überein kamen.

In eben dieser Ordnung hat man aber auch zwischen den Logarithmen 1 und 10, d. i., zwischen 0,0000000 und 1,0000000, eben so viele arithmetische Proportionalzahlen gesucht, und diejenigen, so in der Ordnung dieses Verfahrens zu den vorigen mittlern geo=

geometrischen gehörten, wurden nun die Logarithmen derselben, wodurch man, zu den natürlichen Zahlen von 1 bis 10, folgende Logarithmen erhielt.

Natürliche Zahlen.	Logarithmen.
1	0,0000000
2	0,3010300
3	0,4771213
4	0,6020600
5	0,6989700
6	0,7781512
7	0,8450980
8	0,9030900
9	0,9542425
10.	1,0000000.

Auf die nämliche Art, welche man das Interpoliren heißt, ist man auch in Berechnung der Logarithmen für die übrigen Zahlen, die zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000 u. s. w. fallen, verfahren, woraus denn diejenigen Tafeln entstanden sind, die unter dem Namen der logarithmischen Tafeln bekannt sind, in welchen, durch die Benennung der natürlichen Zahlen (numeri naturales), sowohl die Glieder der geometrischen Progression selbst, als auch alle dazwischen gehörige Zahlen, verstanden werden, deren zugehörige Logarithmen ihnen gegenüber stehen.

Anmerkung.

Auf diesem mühsamen Wege haben verschiedene Mathematiker der vorigen Jahrhunderte logarithmische Systeme, zum vortheilhaften Gebrauche, berechnet und in Tabellen gebracht.

Johann Neper, Baron von Merchiston, ein Schottländer, war der erste, der auf den Gedanken fiel, eine Vergleichung der Eigenschaften einer geometrischen und arithmetischen Progression anzustellen, um daraus die ersten logarithmischen Tabellen zu berechnen und 1614 heraus zu geben.

Just Byrgius, ein Schweizer, machte, beinahe zu gleicher Zeit mit Nepern, logarithmische Tafeln bekannt.

Die

Die Verfertigung dieser Tafeln soll sogar um mehrere Jahre älter als die Nepersche sein, daß also die Erfindung der Logarithmen den Deutschen gehörte.

Stiefel, ein Königsbergischer Mathematiker, verglich bereits 1544 die geometrischen mit den arithmetischen Progressionen.

Da die Neperschen Tafeln beim Gebrauche noch sehr unbequem waren; so wählte Heinrich Brigg, Professor der Geometrie zu Oxford, auf Nepers Anrathen, das gewöhnliche System, und berechnete darnach die Logarithmen, bis auf die 14te Decimalstelle.

Adrian Vlacq ergänzte dieselben, und wegen ihrer Bequemlichkeit wurden sie bald allgemein gebraucht.

Unter den neuern Ausgaben sind die englischen von Gardener die vollständigsten; unter den deutschen Ausgaben aber die in Berlin 1778 herausgekommenen.

Die, in Wien, von Vega herausgegebenen logarithmischen Tafeln sind nicht nur die correctesten, sondern auch die wohlfeilste unter den größern Ausgaben.

Erklärungen.

§. 307. Die erste Ziffer eines Logarithmen, welche durch ein Komma von den übrigen abgesondert ist, heißt die Kennziffer (Characteristik), und ist eigentlich der Logarithme des nächst kleinern Zehners; die übrigen darauf folgenden Ziffern aber zeigen den Decimalbruch an, um welchen der Logarithme für eine Zahl zwischen zwei Zehnern noch größer sein muß.

So ist z. B. in dem Logarithmen von der Zahl 7 = 0,845098 die erste Ziffer, 0 die Kennziffer, und die übrigen der Decimalbruch, weil eigentlich 0 der Logarithme von 1 ist.

Ferner ist in dem Logarithmen von 446 = 2,649334, 2 die Kennziffer, nämlich, der wahre Logarithme von 100; da aber die Zahl 446 zwischen 100 und 1000 fällt, so muß zu dem Logarithmen 2 noch ein Decimalbruch hinzu kommen, der zu dieser Zwischenzahl gehöret.

§. 308. Da die Logarithmen von 0 anfangen, und die geometrische Progression allezeit um eine 0 wächst; so muß die Kennziffer eines jeden Logarithmen

aus

aus so viel Einheiten weniger Eins bestehen, als dessen zugehörige natürliche Zahl Ziffern enthält; oder, so oft die Glieder der geometrischen Progression, oder die natürlichen Zahlen selbst, um eine Ziffer steigen, oder mit 10 multipliciret werden, so oft wächst die Kennziffer ihres Logarithmen um Eins.

Aus diesem Grunde heißt sie auch eigentlich die Kennziffer, weil man sogleich daraus erkennen kann, zu was für einer Gattung von Zehnern die ihr zugehörige Zahl gehöre; und umgekehrt, aus der Anzahl der Ziffern einer natürlichen Zahl kann bestimmt werden, aus wie viel Einheiten die Kennziffer ihres Logarithmen bestehen müsse.

Z. B. Ist die Kennziffer 0, so fällt die Zahl zwischen 1 und 10; ist sie 3, so fällt sie zwischen 1000 und 10000 ꝛc.

Hat im Gegentheil die natürliche Zahl 6 Ziffern; so ist die Kennziffer des Logarithmen = 5 u. s. w.

Zusatz.

§. 309. **Hieraus folgt denn, daß eine jede, 10 mal vermehrte, natürliche Zahl eben den Logarithmen haben müsse, den die einfache Zahl gehabt hat, nur mit dem Unterschiede, daß die Kennziffer um 1 wachsen muß.**

So ist z. B. der Logarithme
von 9 = 0,954242
• 9 × 10 = 90, = 1,954242
• 90 × 10 = 900 = 2,954242
und so weiter.

Anmerkung.

Da zu unserm Gebrauche 6 Decimalstellen hinlänglich sind; so sind die angehängten Tafeln nur auf 6 solche Stellen eingerichtet.

Zwei-

Zweites Kapitel.

Von dem Gebrauche der logarithmischen Tafeln.

Aufgabe.

§. 310. Den Logarithmen eines ächten Bruches zu finden.

Auflösung.

1) Man suche in den Tafeln die Logarithmen vom Zähler und Nenner des gegebenen Bruches.

2) Nun subtrahire man beide Logarithmen von einander; so ist der Unterschied, welcher aber **negativ** angesetzt werden muß, der Logarithme des Bruches.

Z. B. Man verlangt den Logarithmen von $\frac{2}{3}$, so ist Log. $\frac{2}{3}$ = Log. 2 — Log. 3 = 0,301030 — 0,477121 = — 0,176091.

Beweis.

Da ein jeder Bruch als eine Division angesehen werden kann (§. 54.), durch die Logarithmen die Division aber in eine Subtraction verwandelt wird (§. 303.); so muß eigentlich der Log. des Nenners von dem Log. des Zählers abgezogen werden; da aber der Log. des Nenners in einem ächten Bruche größer ist, als der Log. des Zählers, so kann dieser Unterschied nach den Begriffen der allgemeinen Rechenkunst (§. 145.) nicht anders als negativ werden.

1. Zusatz.

§. 311. Ist der gegebene Bruch ein Decimalbruch, so subtrahiret man ebenfalls den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers.

Der Logarithme des Nenners ist allezeit der Logarithme derjenigen Potenz von 10, welche den Nenner des Bruches angiebt.

Z. B. Es soll der Logarithme von 0,106 gefunden werden; so ist Log. 106 — Log. 1000 = 2,025305 — 3,000000 = — 0,974695.

In zusammengesetzten Rechnungen ist es größtentheils vortheilhafter, die Differenz der beiden Logarithmen blos anzu-

anzuzeigen, und nicht berechnet anzugeben. So würde man, im vorigen Beispiele, 0,106 setzen, Log. 2,025305 — 3. Nur muß man alsdann den negativen Theil in der Rechnung behandeln, wie man überhaupt mit negativen Größen umgehet.

2. Zusatz.

§. 312. Ist es ein gemischter Bruch, so verwandelt man ihn in einen unächten (§. 61.), und verfährt, wie vorhin.

So ist, z. B., Log. $34\frac{3}{4}$ = Log. $\frac{139}{4}$ = Log. 139 — Log. 4 = 2,143014 — 0,602060 = 1,540954.

Aufgabe.

§. 313. Zu einem Logarithmen, dessen Kennziffer und die ersten Ziffern zwar in der Tafel stehen, die übrigen aber mit keinem Logarithmen übereinstimmen, die dazu gehörigen Zahlen zu finden.

Auflösung.

Da hier die dazu gehörige natürliche Zahl zwischen dem nächst kleinern und dem nächst größern Logarithmen fällt; so ist sie größer, als die erstere, und kleiner, als die letztere; und folglich ist sie die kleinere Zahl mit einem Bruche. Man kann diesen Bruch aber am besten in Decimalstellen folgendermaßen finden:

1) Man vermehrt die Kennziffer des gegebenen Logarithmen um so viel Einheiten, als der Nenner des Decimalbruches Nullen bekommen soll, und suchet dessen natürliche Zahl in den Tafeln auf, so nahe man sie finden kann.

2) Von dieser natürlichen Zahl schneidet man rechts so viel Ziffern ab, als die Kennziffer um Einheiten vermehret worden ist; so geben die zur Linken stehenden Ziffern die Ganzen, die zur Rechten aber den Zähler des Decimalbruches der verlangten natürlichen Zahl des Logarithmen.

Z. B. Es ist der Logarithme 1,275397 gegeben, welchen man nicht genau in den Tafeln findet. Will man den Bruch in 10theilen finden; so vermehre man die Kennziffer um 1, so ist Log. 2,274157, dessen natürliche Zahl = 188 ist:

ist; schneidet man nun hiervon rechts eine Ziffer ab, so ist die gesuchte natürliche Zahl 18,8.

Anmerkung.

Je mehr man die Kennziffer vermehrt, desto mehr nähert man sich dem wahren Werthe.

In trigonometrischen Berechnungen wird hiervon Gebrauch gemacht. Man könnte auch den hierzu gehörigen Bruch als einen gewöhnlichen finden; allein, da dieser Fall nicht so gewöhnlich ist, so ist er, als zu unserm Zwecke überflüssig, nicht berühret worden.

Aufgabe.

§. 314. Den Logarithmen einer größern Zahl, als in den gemeinen logarithmischen Tafeln enthalten ist, z. B. von 10272, zu finden.

Auflösung.

Dieses kann auf zweierlei Art geschehen:

A) Man schneidet von der Rechten zur Linken so viel Ziffern ab, daß man dieselbe, so wie die nächst größere, noch in den Tafeln finden kann; so ist dies eben so viel, als wenn man die Zahl durch 100 dividiret hätte; also:

102, 72.

Nun suchet man

1) die Differenz der Logarithmen von der abgeschnittenen Zahl 102, und von der nächst größern, als:

$$\begin{array}{ll} \text{Log. } 103 & = 2{,}012837 \\ \text{Log. } 102 & = 2{,}008600 \\ \hline \text{Differenz} & = 0{,}004237 \end{array}$$

2) Da nun die gegebene Zahl 10272 zwischen 10200 und 10300 enthalten ist; so suchet man ihre Differenz. Z. B. 10200 — 10300 = 100.

3) Durch die Regel de Tri suchet man nun die logarithmische Differenz des abgeschnittenen Decimalbruches, indem man schließt:

Wie die Differenz der Zahlen zu dem abgeschnittenen Decimalbruche; so verhält sich die logarithmische Differenz zu der logarithmischen Differenz jener abgeschnittenen Zahlen; als: 100 : 72 = 0,004237 : x

und folglich $x = \frac{0{,}72 \times 0{,}004237}{100} = 0{,}003050$

4) Diese

4) Diese gefundene Zahl addire man zu dem Logarithmen von 102, und gebe der Kennziffer so viel Einheiten, als die gegebene Zahl Zahlzeichen weniger Eins hat; (§. 308.) nämlich:

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 102 = 2{,}008600 \\ 0{,}003050 \\ \hline \text{so ist Log. von } 10272 = 4{,}011650 \end{array}$$

B) Man kann auch die gegebene Zahl in Factoren zerlegen, und die Logarithmen der Factoren zusammen addiren; so ist die Summe dieser Logarithmen der Logarithme der gegebenen Zahl.

Es sei z. B. der Logarithme von 10272 zu suchen, so ist $428 \times 24 = 10272$; folglich sind 428 und 24 die beiden Factoren, und nun ist

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 428 = 2{,}631443 \\ \text{und Log. } 24 = 1{,}380211 \\ \hline \text{so ist Log. von } 10272 = 4{,}011654 \end{array}$$

Anmerkung.

Man siehet sogleich, daß beide Auflösungen ziemlich übereinkommen. Jedoch ist die zweite Auflösung der erstern vorzuziehen, indem man hier den Logarithmen mit mehrerer Schärfe findet. Indessen ist doch auch die erstere, ohne merkliche Fehler, in der Ausübung zu gebrauchen, indem die Unrichtigkeit nur bei den letzten Ziffern des Logarithmen in etlichen Einheiten bestehen kann, welche, ohne merklichen Unterschied, übergangen werden können.

Aufgabe.

§. 315. Die natürliche Zahl für einen größern Logarithmen, als in den gemeinen logarithmischen Tafeln enthalten ist, zu finden.

Auflösung.

Es sei z. B. der gegebene Log. = 4,011654.

1) Da hier die Kennziffer 4 ist, so siehet man, daß die Zahl in die Hunderttausende fällt. Man suchet nun unter der größten Kennziffer zwischen dem nächst größern und dem nächst kleinern Log. die Differenz; als:

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 103 = 2{,}012837 \\ \text{Log. } 102 = 2{,}008600 \\ \hline 0{,}004237 \end{array}$$

2) Beide

2) Beide natürlichen Zahlen vermehret man durch Anhängung so vieler Nullen, als die gegebene Kennziffer mehr Einheiten hat, als hier 2, und suchet die Differenz dieser natürlichen Zahlen; z. B. 10300 — 10200 = 100.

3) Man suchet auch die logarithmische Differenz des gegebenen und des nächst kleinern Logarithmen; als:

$$\begin{array}{r} 4{,}011654 \\ 4{,}008600 \\ \hline \text{Differ.} = 0{,}003054 \end{array}$$

4) Nun schließe man:

Wie sich verhält die erste logarithmische Differenz zur zweiten des gegebenen und nächst kleinern Logarithmen; so verhält sich die Differenz der beiden natürlichen Zahlen zur Differenz der kleinern und der zu suchenden natürlichen Zahl; als: $0{,}004237 : 0{,}003054 = 100 : x$.

so ist $x = \frac{0{,}003054 \times 100}{0{,}004237} = 72 \ldots.$

5) Diese gefundene Differenz der natürlichen Zahlen addiret man zu der kleinern Zahl; so erhält man die natürliche Zahl des gegebenen Logarithmen; als:

$$\begin{array}{r} 10200 \\ 72 \\ \hline 10272 \end{array}$$

so ist 10272 die natürliche Zahl des gegebenen Log. 4,011654.

Zusatz.

§. 316. Sollte die auf diese Art gefundene Zahl, wie hier der Fall eintritt, nicht ohne Rest gefunden werden; so kann man den dazu gehörigen Decimalbruch durch die Annäherung finden, wenn man (§. 102.) noch so viel Nullen anhängt, als man Decimalstellen haben will.

Aufgabe.

§. 317. Zahlen vermittelst der logarithmischen Tafeln zu multipliciren und zu dividiren.

Auflösung.

Da, nach §. 303, die Multiplication sich in eine Addition, und die Division sich in eine Subtraction verwandelt; so

so darf man nur die Logarithmen dieser Zahlen in den Tafeln suchen, und, im ersten Falle, dieselben addiren, im zweiten aber subtrahiren; so giebt, im ersten Falle, die Summe den Log. des Productes, und, im zweiten Falle, der Rest den Log. des Quotienten. Z. B.

a) Es sei $24 \times 36 = 864$
so ist Log. $36 = 1,556302$ dazu
add. Log. $24 = 1,380211$
$2,936513$ wovon die natürliche Zahl $= 864$ ist.

b) Es sei $896 : 32 = 28$.
so ist Log. $896 = 2,952308$ davon
subtr. Log. $32 = 1,505150$
$1,447158$ wovon die natürliche Zahl $= 28$ ist.

Aufgabe.

§. 318. Zahlen vermittelst der logarithmischen Tafeln zu Potenzen zu erheben, oder, aus selbigen Wurzeln zu ziehen.

Auflösung.

Im ersten Falle darf man nur, nach §. 300, den Logarithmen der gegebenen Zahl durch 2, 3, 4 ꝛc. multipliciren, um die 2te, 3te, 4te ꝛc. Potenz zu erhalten.

Im zweiten Falle aber nur umgekehrt mit 2, 3, 4 ꝛc. dividiren, um die Quadrat- oder Cubikwurzel, oder die Wurzel der 4ten ꝛc. Potenz zu bekommen. Z. B.

a) Es wäre die Zahl 27 zum Quadrat zu erheben;
so ist Log. $27 = 1,431363$, multiplicirt
mit 2
$2,862726$ wovon die natürliche Zahl $= 729$ ist.

b) Es sei aus der Zahl 841 die Quadratwurzel zu ziehen; so ist Log. $841 = 2,924796$, dividirt
durch 2 | $1,462398$, wovon die natürliche Zahl $= 29$ ist.

Anmerkung.

Die am Ende der Arithmetik angehängten Tafeln enthalten nur die Logarithmen von 1 bis 1000. Da man sich der größern

Tafeln

Tafeln eben so, wie dieser, bedienen kann; so wird ein Jeder den Gebrauch derselben bald einsehen. In sehr vielen Fällen, besonders in der Anwendung, hat der Officier Größen zum Gegenstande, die er, ohne Hülfe der Logarithmen, bestimmen muß. In andern Fällen aber werden die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000 für ihn hinreichend sein, Berechnungen, vermittelst derselben, in der Theorie durchzuführen.

Ohne Kenntniß der Logarithmen und ihres Gebrauches ist es aber auch eben so unmöglich, sich auch nur mit den ersten Gründen der Mathematik, besonders der Trigonometrie, bekannt zu machen.

Da der Officier, bei Berechnungen, die in den Kriegswissenschaften vorkommen, die Längen größtentheils nach Schritten bestimmt; so wird es für ihn vortheilhaft sein, große Zahlen in Factoren, nach §. 314., zu zerlegen, wovon keiner mehr als 8 Zahlzeichen enthält.

Dieses Verfahren macht in vielen Fällen mühsame Berechnungen entbehrlich, und dieß muß, neben der besten Kenntniß der Theorie, ein Hauptaugenmerk für den Officier sein.

Siebenter Abschnitt.

Von den verschiedenen Arten der Proportionsrechnungen.

Erstes Kapitel.

Von der einfachen Regel de Tri.

Erklärungen.

§. 319. Die bisher bewiesenen Sätze, welche Eigenschaften der Proportionen heißen, werden in allen Theilen der mathematischen Wissenschaften angewendet. Die Anwendung des Lehrsatzes (§. 267.), nach welchem man zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl sucht, und vorzüglich die Regel de Tri (Regula de tribus terminis) genannt

wird, ist besonders der Arithmetik eigen, und in allen Geschäften des bürgerlichen Lebens von dem ausgebreitetsten Nutzen; daher sie auch die goldene Regel genannt wird. Wir wollen mit derselben den Anfang machen.

I. Gerade einfache Regel de Tri.

§. 320. Zwei Dinge von einerlei Art, aber von verschiedener Größe, sind mit einander in gerader Proportion, wenn beide Größen in gleichem Verhältnisse zugleich ab- oder zunehmen.

Wenn aber die eine Größe in eben dem Verhältnisse abnimmt, als die andere zunimmt, oder umgekehrt; so stehen sie in umgekehrter Proportion rc.

Hieraus entstehet nun auch ein Unterschied in der Regel de Tri, und die Nothwendigkeit, dieselbe ebenfalls in die gerade (directa) und umgekehrte (inversa) Regel de Tri einzutheilen.

§. 321. Die zuerst hier abzuhandelnde Regel de Tri wird überhaupt auch die einfache genannt, weil jede durch sie aufzulösende Frage nicht mehr als vier Größen enthält, von welchen drei bekannt sind, und die vierte bestimmt werden muß. Die gerade heißt sie, weil die vier Größen, von welchen die Rede ist, je zwei zu zwei, in gleichem Verhältnisse, entweder ab- oder zunehmen, so daß man sagen kann: So oft die erste in der zweiten enthalten ist, so oft ist auch die dritte in der vierten enthalten. Z. B. Wenn 3 Pfund 4 Thlr. kosten, so müssen noch ein- zwei- drei- rc. mal so viel Pfund, auch noch ein- zwei- dreimal so viel Thaler kosten; also 6 Pfund 8 Thaler, 9 Pfund 12 Thaler u. s. w. Oder, laut der im vorigen §. gegebenen Erklärung, würde man sagen; 6 Pf. : 9 Pf. = 8 Thlr. : 12 Thlr.

Zusatz.

Zusatz.

§. 322. In gerader Proportion stehen:

1) Die Zeit, oder die Anzahl der Arbeiter, mit der Größe der Arbeit.

2) Die Größe des Capitals mit den Procenten oder der Größe der Zinsen.

3) Das Gewicht, oder die Größe und Anzahl der Waare, mit der Größe des Preises.

4) Die Anzahl der Menschen, oder die Dauer der Zeit, mit der Größe der nöthigen Lebensmittel.

5) Die Größe der Ursache, oder die Dauer der Zeit, mit der Größe der Wirkung ꝛc.

Folgende Aufgabe wird uns zur Auflösung solcher Fälle den Weg bahnen.

Aufgabe.

§. 323. Eine Rechnungsfrage vermittelst der geraden Regel de Tri aufzulösen, und die gesuchte vierte Zahl, oder das Facit, zu finden.

Auflösung.

Da in einer jeden Rechnungsfrage allezeit zwei Dinge von einerlei Namen, oder wenigstens von einerlei Art sind, so, daß sie auf einerlei Namen gebracht werden können, und folglich die dritte von den gegebenen Zahlen wieder mit der gesuchten von einerlei Art ist; so kann man folgende Regel festsetzen:

Man bringe die Dinge von einerlei Art jederzeit in ein Verhältniß; so wird das dritte mit dem zu suchenden von einerlei Art sein. Nun sehe man, ob man mehr oder weniger zum vierten Gliede erhalten werde. Wird nun das vierte, als der Consequent des zweiten Verhältnisses, größer, als der Antecedent derselben; so ist natürlich, daß der Consequent des ersten Verhältnisses auch größer, als der Antecedent desselben sein, und man also von dem Kleinern auf das Größere schließen muß; und so auch umgekehrt.

Beispiel.

Wenn 200 Pf. mit 428 Thlr. bezahlt werden, und man will den Preis von 800 Pf. wissen; so ist es sehr natürlich, daß

daß für 800 Pf. mehr als für 200 Pf. bezahlt werden müssen, und daß, so oft 200 Pf. in 800 Pf. enthalten sind, so oft auch der Preis von 428 Thlr. in dem zu findenden Preise enthalten sein muß, welcher hier natürlich größer als 428 Thlr. ausfallen muß. Daraus entstehet nun folgende Proportion:

200 Pf. : 800 Pf. = 428 Thlr. : x Thlr.

800

200) 3424|00|1712 Thlr. = x.

1. Zusatz.

§. 324. Die Rechenmeister schreiben dergleichen Exempel also:

200 Pf. kosten 428 Thlr.; was kosten 800 Pf.?

Diese Proportion ist aber die nämliche, wenn man die Glieder der vorigen alternirt, und man erhält folglich das nämliche Facit.

Anmerkung.

Den Anfängern gefällt dieser Ansatz am meisten; allein der mathematische behält seine Vorzüge, welches wir auch in der Folge, bei der umgekehrten Regel de Tri, erfahren werden.

2. Zusatz.

§. 325. Die in den Rechenbüchern angewiesenen Vortheile, dergleichen Exempel abzukürzen, gründen sich alle auf den Lehrsatz (§. 272.), daß, wenn man zwei in Verhältniß stehende Zahlen durch einerlei Zahl dividiret, die Quotienten in dem nämlichen Verhältnisse bleiben. Dadurch sind wir nun in den Stand gesetzt, die größern Zahlen eines Exempels auf kleinere reduciren zu können, wenn man nämlich das erste und zweite Glied, oder das erste und dritte, durch einerlei Zahl ohne Rest dividiret. Z. B.

~~200~~ Pf. : ~~800~~ Pf. = 428 Thlr. : x Thlr.

200) 1 4 4

1712 Thlr. = x wie oben.

Hier läßt sich 200 und 800 durch 200 aufheben, und, nach geschehener Multiplication mit den übrig gebliebenen Zahlen, erhält man das nämliche Resultat.

3. Zu-

3. Zusatz.

§. 326. Will man die Logarithmen bei der Regel de Tri anwenden; so addiret man die zwei mittelsten Glieder, und subtrahirt das erste von der gefundenen Summe. (§. 317.) Z. B.

200 Pf. : 800 Pf. = 428 Thlr. : x
so ist Log. 800 = 2,903090
Log. 428 = 2,631443

5,534533 davon
abgezog. Log. 200 = 2,301030 so ist
der Rest = 3,233503 = 1712 Thlr. = x.

Anmerkung.

Man benutzet jetzt schon die Logarithmen, in verschiedenen Tabellen, zum Behufe kaufmännischer Rechnungen, nach denen man blos addirt und subtrahirt, was sonst mühsam berechnet werden mußte.

4. Zusatz.

§. 327. Befinden sich bei den Gliedern kleinere Einheiten; so reducire man alles auf einerlei Einheiten (§. 112.), und verfahre übrigens, wie vorhin; nur daß man hernach die kleinern Einheiten wieder auf größere setzen muß.

Beispiel.

Wenn 1 Pf. Schießpulver 8 gr. 6 pf. kostet; was kosten 2 Ztn. 56 Pf. 8 Loth? so ist der Ansatz:

```
1 Pf. : 2 Ztn. 56 Pf. 8 Loth, = 8 gr. 6 pf. : x.
32 Lth.  110                      12
32       276 Pf.                  96
          32                       6
         560                     102 pf.
         828
        8840 Lth.
         102 pf.
       17680
       8840
32)    901680 | 28177 | 2348 | 97 Thlr. 20 gr. 1½ pf.
        64      12)24    24)216
        261        41       188
        256        36       168
         56        57        20 gr.
         32        48
         248       97
         224       96
          240       1 pf.
          224
           16
           32  = ½
```

5. Zusatz.

§. 328. Bleibt am Ende ein Bruch übrig, welchen man auf bekannte Einheiten reduciren wollte; so verfährt man, indem man die Eintheilung der Gattung, von welcher der Bruch ist, zum Nenner annimmt, völlig nach §. 114.

6. Zusatz.

§. 329. Mit den Exempeln, welche mit Brüchen verbunden sind, hat es auch keine besondere Schwierigkeiten, sobald man nur das, was bei der Multiplication und Division mit Brüchen gesagt worden ist, wohl gefaßt hat.

Beispiel.

Wenn man für 1½ Pf. ⅔ Thlr. bezahlen muß, und man wollte wissen, wie viel man für 3⅓ Thlr. bekömmt? so ist der Ansatz:

⅔ Thlr. : 3⅓ Thlr. = 1½ Pf. : x.

Man

Man setze nun alle Glieder auf unächte Brüche, kehre den Divisor um, und multiplicire die Zähler mit den Zählern, und die Nenner mit den Nennern, nach den Regeln der Bruchrechnung (§. 67. u. folg.); so ist:

$$\tfrac{2}{3} : 3\tfrac{1}{3} = 1\tfrac{1}{2} : x$$

$$\tfrac{2}{3} : \tfrac{10}{3} = \tfrac{3}{2} : x$$

$$\text{und } x = \tfrac{3}{2} \times \tfrac{10}{3} \times \tfrac{3}{2} = \tfrac{90}{12} = 7\tfrac{1}{2} \text{ Pf.}$$

Hier ist es nun sehr vortheilhaft, das Exempel auf einen sogenannten Ausdruck zu setzen, um eine Abkürzung der Glieder, durch die Division der Zähler und Nenner mit einerlei Zahl, vornehmen zu können, da, nach §. 66., der Werth der Brüche auf diese Art nicht verändert wird. Z. B.

$$\frac{\overset{}{\cancel{3}} \times \overset{5}{\cancel{10}} \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \cancel{3} \times 2} = \frac{5 \times 3}{1 \times 2} = \tfrac{15}{2} = 7\tfrac{1}{2} \text{ Pf.} = x, \text{ wie oben.}$$

Anmerkung.

Daß der Vortheil dieses Ausdruckes, und das damit verbundene Aufheben, sich ebenfalls bei Beispielen ohne Brüche anwenden läßt, ist einleuchtend. In der Folge wird hiervon Gebrauch gemacht werden.

7. Zusatz.

§. 330. Befinden sich bei den Gliedern kleinere Einheiten mit Brüchen; so reducire man alles auf einerlei Einheiten und unächte Brüche (§. 61.), kehre den Divisor um, und verfahre übrigens wie oben.

Beispiel.

Man bezahlt für 1 Pf. 6½ Loth, 6 Thlr. 5¾ gr.; was wird man für 84 Pf. 18¼ Loth bezahlen müssen? so stehet der Ansatz also:

1 Pf. 6½ Loth :	84 Pf. 18¼ Loth =	6 Thlr. 5¾ gr. : x Thlr.
32	32	24
38½ Loth	168	149¾ gr.
77	252	599
2	2706¼ Loth.	4
	10825	
	4	

$$\text{folgl. } x = \frac{2 \times 10825 \times 599}{77 \times 4 \times 4} = \frac{6484175}{616} = 438 \text{ Thl. } 14\tfrac{159}{616} \text{ gr.}$$

Probe

Probe der Regel de Tri.

§. 331. Die Probe auf alle Exempel in der Regel de Tri bestehet darin, daß man den Ansatz umwendet. Z. B. Die Probe auf das §. 329. gegebene Beispiel würde heißen:

Für $3\frac{1}{3}$ Thlr. bekommt man $7\frac{1}{2}$ Pf.; wieviel für $\frac{2}{3}$ Thlr.? Und der Ansatz:

$3\frac{1}{3}$ Thlr. : $\frac{2}{3}$ Thlr. = $7\frac{1}{2}$ Pf. : x Pf.
$\frac{10}{3}$ $\frac{15}{2}$

$$\text{und } x = \frac{\not{3} \times \not{2} \times \overset{3}{\not{15}}}{\not{10} \times \not{3} \times 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ Pf.}$$
5) $\not{2}$

Man siehet, daß man hier $1\frac{1}{2}$ Pf., wie in §. 329, für $\frac{2}{3}$ Thlr. bekommt.

Beispiele zur Uebung.

I. Eine Besatzung von 2640 Mann brauchte monatlich 84 Scheffel Getreide zu ihrem Unterhalte. Da dieselbe bis 9500 Mann verstärkt worden ist; so ist die Frage: Wie viel Scheffel jetzt erfordert werden?

2640 M. : 9500 M. = 84 Schfl. : x Schfl.

so ist $x = \frac{9500 \times 84}{2640} = 302$ Schfl. $4\frac{4}{11}$ Mtz.

II. Ein Capital von 450 Rthlr. giebt jährlich 36 Rthlr. Interessen; wie viel wird ein Capital von 100 Rthlr. in eben dieser Zeit geben?

C.	C.	J.	J.
450 Thlr. :	100 Thlr. =	36 Thlr. :	x Thlr.

so ist $x = \frac{100 \times 36}{450} = 8$ Thlr.

III. Bei Erbauung einer Festung kam ein Stück Wall von 53 Ruthen Länge auf 1600 Thlr. 12 gr. zu stehen. Wie viel wird man für den ganzen Umfang der Festung, welcher 890 Ruthen beträgt, an Arbeitslohn bezahlen müssen?

53 R. : 890 R. = 1600 Thlr. 12 gr. : x Thlr.

$$
\begin{array}{r}
24 \\
\hline
6412 \\
32 \\
\hline
38412 \text{ gr.} \\
890 \\
\hline
3457080 \\
307296 \\
\hline
\frac{34186680}{53} = 645031 \text{ gr.} = 26876 \text{ Thl. } 7\tfrac{37}{53} \text{ gr.} = x.
\end{array}
$$

II. Umgekehrte einfache Regel de Tri.

Erklärung.

§. 332. Die umgekehrte einfache Regel de Tri unterscheidet sich von der eben abgehandelten geraden dadurch, daß von den vier Größen, aus welchen die Proportion bestehet, zwei in eben dem Verhältnisse zu-, als die beiden andern abnehmen. Z. B. Wenn 12 Mann in 4 Tagen ein gewisses Werk zu Stande bringen; so können 24 Mann nur 2 Tage zubringen. Hier sagt man nun: Die Größen stehen in umgekehrtem Verhältnisse; denn es ist klar, daß, wenn 12 Mann in 4 Tagen fertig werden, eine doppelte Anzahl Arbeiter nicht eine doppelte Anzahl Tage, sondern umgekehrt, nur die Hälfte Zeit, nämlich nur 2 Tage, zubringen müssen.

Uebrigens entstehet hierdurch bei der Operation selbst kein Unterschied; denn man bestimmt auch hier das vierte Glied der Proportion auf eben diese Art, wie bei der geraden Regel de Tri, wenn man nur Acht giebt, ob mehr oder weniger herauskommen muß, und darnach den Ansatz ordnet.

Anmerkung.

Manche Rechenmeister haben für diesen Fall besondere, der Aussage der Frage unterworfene, Regeln vorgeschrieben, und setzen

zen dadurch Ungeübte in Verlegenheit. Die folgende Aufgabe wird uns aber zeigen, daß man die umgekehrte Regel de Tri, eben so wie die gerade, behandeln kann, ohne daß man eigentlich nöthig habe, zu wissen, ob die Rechnungsfrage zur geraden oder umgekehrten Regel de Tri gehöre.

Zusatz.

§. 333. In umgekehrter Proportion stehen:

1) Die Zahl der Arbeiter mit der Dauer der Arbeit.

2) Die Zahl der Menschen mit der Dauer der Lebensmittel.

3) Das Gewicht des Brotes mit dem Einkaufspreise des Mehles.

4) Die Länge einer Bekleidung mit ihrer Breite.

5) Die Geschwindigkeit zweier Bothen mit den Zeiträumen, in denen sie einerlei Weg zurücklegen, u. s. w.

Aufgabe.

§. 334. Eine Rechnungsfrage der umgekehrten Regel de Tri aufzulösen, und die gesuchte vierte Zahl zu finden.

Auflösung.

Man bringe die Dinge von einerlei Art, wie bei der geraden Regel de Tri, wieder in ein Verhältniß (§. 323.), und sehe nur, ob man mehr oder weniger zum vierten Gliede erhalten müsse, um darnach die Glieder des ersten Verhältnisses zu ordnen.

Beispiel.

Wenn 100 Mann in 20 Tagen eine Schanze verfertigen; wie lange werden 200 Mann darüber zubringen?

Die Natur der Sache zeigt, daß 200 Mann weniger Tage, und zwar, weil es die doppelte Anzahl ist, nur halb so lange, nämlich 10 Tage, über dieser Arbeit zubringen werden. Man setze also die 20 Tage ins dritte Glied, und da hier, den Umständen gemäß, weniger herauskommen, und man also von dem Größern aufs Kleinere schließen muß; so kommt die größere von den beiden andern Zahlen in das erste Glied, und die kleinere in das zweite Glied, und so erhält man folgende Proportion:

200

200 Mann : 100 Mann = 20 Tage : x Tage.
200 M. : 100 M.

$$\frac{2\ 0}{200)\ \frac{2000}{00}} \Big|\ 10 \text{ Tage} = x.$$

Das Resultat von 10 Tagen zeigt die Richtigkeit des Ansatzes.

1. Zusatz.

§. 335. Man siehet hieraus sehr deutlich, daß man bei der umgekehrten Regel de Tri eben so, wie bei der geraden, verfahren kann, wenn man sich dieser Art, den Ansatz zu formiren, bedienet, wodurch denn allerdings dem Anfänger die Sache sehr erleichtert wird. Man hätte also eigentlich nicht nöthig, einen Unterschied zwischen diesen beiden Arten der Regel de Tri zu machen; denn es gilt in beiden Fällen die allgemeine Regel:

Die Dinge von einerlei Art in ein Verhältniß zu bringen, und nur darauf zu sehen, ob mehr oder weniger heraus kommen müsse, um darnach die Glieder des ersten Verhältnisses zu ordnen.

2. Zusatz.

§. 336. Mit den mit Brüchen verbundenen Rechnungsfragen hat es die nämliche Bewandniß. Z. B. Eine Compagnie braucht 427½ Elle Montirungstuch, welches 2¼ Elle breit liegt; wie viel wird sie Unterfutter brauchen, welches nur ¾ Elle breit liegt? Unterfutter braucht man mehr, als Tuch, weil jenes schmäler lieget, als dieses. Folglich stehet der Ansatz:

Br. d. Untf. Br. d. Tuchs. Länge d. Tuchs. Länge d. Untf.

$\frac{3}{4}$ Elle. : $2\frac{1}{4}$ Elle. = $427\frac{1}{2}$ Elle. : x Elle.

$\frac{4}{3}$ $\frac{9}{4}$ $\frac{855}{2}$

so ist $x = \frac{4 \times 9 \times 855}{3 \times 4 \times 2} = 1282\frac{1}{2}$ Elle Untf.

Anmerkung.

Aus der umgekehrten Ordnung der Breiten und Längen kann man das umgekehrte Verhältniß in diesem Beispiele sehr deutlich sehen.

Beispiele zur Uebung.

I. Es hat Jemand zwei gleich große Capitale, jedes von 1000 Thlr., ausgeliehen, das eine zu 5, und das andere zu 6 pro Cent. Wie lange muß nun jedes stehen, bis es eben so viel Interessen bringt, als das zu 6 pro Cent in 12 Jahren gebracht hat?

5 pro Cent : 6 pro Cent = 12 Jahr : x Jahr.

so ist $x = \frac{6 \times 12}{5} \times 14\frac{2}{5}$ Jahr.

II. Wenn der Scheffel Korn 1 Thlr. 8 gr. ($1\frac{1}{3}$ Thlr.) gilt; so kann die Portion Brot $1\frac{1}{2}$ Pf. schwer gebacken werden. Wie schwer wird dieselbe werden, wenn der Scheffel 2 Thlr. 16 gr. ($2\frac{2}{3}$ Thlr.) gilt?

$2\frac{2}{3}$ Thlr. : $1\frac{1}{3}$ Thlr. = $1\frac{1}{2}$ Pf. : x Pf.

$\frac{8}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{3}{8}$

so ist $x = \frac{3 \times 4 \times 3}{8 \times 3 \times 2} = \frac{3}{4}$ Pf. = 24 Lth.

III. In einer belagerten Stadt befanden sich 6000 Mann Besatzung, und hinlänglicher Vorrath auf 6 Wochen. Da die Festung aber erst in 10 Wochen entsetzt werden konnte; so entschloß sich der Commandant, einen Theil seiner Besatzung fortzuschicken, und mit den übrigen die Belagerung auszuhalten, ohne die Portionen kleiner zu machen. Wie viel wird der Commandant nun fortschicken, und wie viel wird er in der Festung behalten müssen?

10 W. : 6 W. = 6000 M. : x M.

so ist $x = \frac{6 \times 6000}{10} = 3600$ diese von 6000 abgezogen, bleiben 2400 Mann, welche er aus der Festung fortschicken muß.

IV. Als die Belagerung 9 Wochen gedauert hat, bekommt der Commandant Nachricht, daß der Entsatz erst in $2\frac{1}{2}$ Wochen ankommen kann. Da nun die Portionen $1\frac{1}{2}$ Pf. täglich waren; so fragt es sich, wie groß sie jetzt werden müssen?

$2\frac{1}{2}$ W. : 1 W. = $1\frac{1}{2}$ Pf. : x Pf.

$\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$

so ist $x = \frac{\not 2 \times 1 \times 3}{5 \times 1 \times \not 2} = \frac{3}{5}$ Pf. = 19 Lth. $\frac{4}{5}$ Quentch.

Zwei=

Zweites Kapitel.

Von der zusammengesetzten Regel de Tri.

Erklärungen.

§. 337. In den beiden vorhergehenden Arten der Regel de Tri wurde, in jeder Aufgabe, das Verhältniß der zu bestimmenden Größe, die mit ihr von einerlei Art ist, durch ein einfaches Verhältniß der beiden andern Größen von dieser Aufgabe bestimmt.

In der zusammengesetzten Regel de Tri (Regula de tri composita) aber erhält das Verhältniß der zu bestimmenden Größe, die mit ihr von einerlei Art ist, nicht bloß durch ein einfaches Verhältniß zweier andern Größen seine Bestimmung, sondern durch mehrere einfache Verhältnisse, die nach den Umständen der Aufgabe zusammengesetzt werden müssen.

Nach der Anzahl der gegebenen Sätze giebt man dieser zusammengesetzten Regel de Tri verschiedene Namen. Bestehet sie z. B. aus fünf Sätzen, so heißet sie die Regel quinque; mit sieben Sätzen, die Regel septem rc.; überhaupt, multiplex. Unter den Sätzen können sich wohl etliche befinden, die in einem geraden, andere hingegen, die in einem umgekehrten Verhältnisse stehen; daher man auch die zusammengesetzte Regel de Tri in die gerade und umgekehrte zusammengesetzte Regel de Tri eintheilt.

Da aber auch Fälle eintreten können, wo die Sätze untereinander, theils in geradem, theils in umgekehrtem Verhältnisse stehen; so könnte noch eine gemischte zusammengesetzte Regel de Tri Statt finden. So wie aber, bei der einfachen Regel de Tri, kein Unterschied in Ansehung des Ansatzes Statt fand; so ist hier der nämliche Fall. Folgende Aufgabe wird uns zur Auflösung aller dieser Fälle den Weg bahnen.

I. Zusammengesetzte gerade Regel de Tri.

Aufgabe.

§. 338. Die zusammengesetzte gerade Regel de Tri gehörig in Ansatz zu bringen, und das Facit zu finden.

Auflösung.

Dieses kann auf zweierlei Art geschehen:

1) Durch mehrere Ansätze; oder kürzer,
2) Durch einen Ansatz.

1) Durch mehrere Ansätze.

Ohngeachtet wir uns in der Folge nur der zweiten Art bedienen werden; so wollen wir doch, zu besserer Uebersicht, auch die Auflösung durch zwei Ansätze zeigen.

Beispiel.

Wenn 100 Mann, mit 4 Scheffeln, 8 Tage lang unterhalten werden können; wie viel Scheffel werden erforderlich sein, 250 Mann 40 Tage zu unterhalten?

Da hier 5 Sätze vorhanden sind, so sondere man die Umstände von einander, und vergleiche anfangs nur einige; die übrigen setze man bei Seite, und alsdann gehe man zu den übrigen fort, und löse die Aufgabe so stufenweise auf:

In unserm Beispiele wollen wir erst die Zeit bei Seite setzen, und die Mannschaft mit dem Vorrathe vergleichen; so hat man 3 Stücke, vermittelst derer man nach der Regel de Tri sagen kann:

$$100 \text{ M.} : 250 \text{ M.} = 4 \text{ Schfl.} : x \text{ Schfl.}$$

$$\text{so ist } x = \frac{250 \times 4}{100} = 10 \text{ Schfl.}$$

womit 250 Mann in 8 Tagen unterhalten werden können.

Nun setze man die Mannschaft bei Seite, und vergleiche die Zeiten mit dem Vorrathe; so hat man wieder 3 Stück. Z. B.

$$8 \text{ T.} : 40 \text{ T.} = 10 \text{ Schfl.} : x \text{ Schfl.}$$

$$\text{so ist } x = \frac{40 \times 10}{8} = 50 \text{ Schfl.}$$

womit 250 Mann 40 Tage lang unterhalten werden können.

Da

Da eine größere Mannschaft, und eine längere Zeit, auch einen größern Vorrath erfordern; so gehören beide Ansätze zur geraden Regel de Tri.

2) Durch einen Ansatz:

Hier vergleiche man die Dinge von einerlei Art wieder zusammen, und setze, wie im Vorigen, einige Umstände bei Seite. Z. B. In unserm vorigen Beispiele bestehet das zweite Verhältniß aus Scheffeln, welche gesucht werden. Nun vergleiche man die Mannschaft, und setze die Zeit einerlei; so ist klar, daß eine größere Mannschaft auch eines größern Vorrathes benöthiget ist; folglich schließe man vom Kleinern auf das Größere.

Das Nämliche gilt auch von der Zeit, wenn man die Mannschaft bei Seite setzt. Nun setze man diese Verhältnisse gehörig unter einander, und man erhält folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{matrix}100 \text{ M.}\\ 8 \text{ T.}\end{matrix}\right) : \left.\begin{matrix}250 \text{ M.}\\ 40 \text{ T.}\end{matrix}\right) = 4 \text{ Schfl.} : x.$$

Diese zusammengesetzten Verhältnisse werden mit einander multipliciret (§. 181.), und man siehet, daß, in beiden Fällen, die Mannschaften mit ihren Zeiten multipliciret werden, und dadurch alles auf einerlei Zeit gesetzt wird.

Das Nämliche gilt auch von allen übrigen Arten der zusammengesetzten Regel de Tri. Betrachtet man diesen Ansatz, so wird man finden, daß er mit den beiden Ansätzen im vorigen §. nicht allein völlig übereinstimmt, sondern auch eine vortheilhaftere und geschwindere Auflösung verstattet, weil man nicht nöthig hat, das im ersten Ansatze herausgekommene Resultat, wenn es zumal mit Brüchen vermischt ist, in den folgenden Ansatz hineinzubringen, und sich die Rechnung weitläuftiger zu machen. Um sich aber der Vortheile des Aufhebens zu bedienen; so setze man das Exempel auf einen Ausdruck, und sage:

$$x = \frac{250 \times 40 \times 4}{100 \times 8} = 50 \text{ Schfl.}$$

Zusatz.

§. 339. Untersucht man diese Aufgabe genauer, und sagt: 100 Mann = a reichen 8 Tage = c mit 4 Schfl. = d, 250 Mann = b reichen 40 Tage = m mit x Schfl.; so ist:

$$\begin{array}{l} a : b \\ c : m = d : x; \\ \hline \text{und } ac : bm = d : x \ (\S.\ 281.) \\ \hline \text{und } acx = bmd \\ \hline \text{folgl. } x = \frac{bmd}{ac} \end{array}$$

Aus dieser Formel läßt sich nun eine allgemeine Regel herleiten, wie jede, aus noch so vielen geraden und verkehrten Verhältnissen bestehende, Aufgabe der zusammengesetzten Regel de Tri ganz einfach aufgelöset werden kann. Da in einer geometrischen Proportion das Product der beiden äußern Glieder dem Producte der beiden mittlern gleich ist (§. 259.), nämlich hier $acx = bmd$, und man setzet die Factoren, welche das erste Glied, so wie auch die, welche das zweite Glied ausmachen, unter einander; als:

$$\begin{array}{c} a : b \\ c : m \\ x : d \end{array}$$

und zwar so, daß die Factoren beider Glieder als gleichartige Größen dergestalt neben einander zu stehen kommen, daß sie im gehörigen Verhältnisse bleiben, je nachdem sie in geradem oder umgekehrtem Verhältnisse stehen: so erhält man, durch die Multiplication der also unter einander stehenden Factoren, die Gleichung

$$acx = bmd$$

in welche die geometrische Proportion, wie oben, verwandelt wird, und daher

$$x = \frac{bmd}{ac}, \text{ wie oben.}$$

Hieraus folgt, daß man mit dem Producte der bekannten Factoren der ersten Reihe in das Product der Factoren der andern Reihe dividiren muß, um das sogenannte Facit zu erhalten. Diese hieraus hergeleitete Regel wird insgemein die Reesische Regel genannt, und ist also nichts anders, als die Verwandlung der geometrischen Proportion in eine Gleichung, und die Reduction der unbekannten Größe, indem man die Verhältnisse kettenweise so ansetzt, daß alle Factoren des Divisors mit der unbekannten Größe auf die eine Seite, und die Factoren des Dividendus auf die andere Seite kommen, wie es auch vorige allgemeine Formel zeiget.

Man

Man sondert zu diesem Behufe die Verhältnisse durch einen stehenden Strich ab, und schreibt zur linken die unbekannte Größe, rechts aber die ihr gleichnamige. Welche Glieder sich auf jede Größe besonders beziehen, diese setzt man auf die entgegengesetzte Seite, dergestalt, daß die also geordneten Größen gleichnamige Verhältnisse ausmachen. Nur untersuche man, ob die Verhältnisse gerade oder umgekehrt sind. Kommen Brüche unter den Zahlen vor, so werden sie weggeschafft, wenn man den Zähler an seiner Stelle stehen läßt, den Nenner aber auf die entgegengesetzte Seite schreibt.

Diese Verhältnisse können ebenfalls durch die Division der Glieder (§. 272.) abgekürzt werden. Obiges Beispiel würde nun folgendergestalt geordnet stehen:

x	4 Schfl.
100 M.	250 M.
8 T.	40 T.
100 × 8	4 × 250 × 40

und $x = \frac{4 \times 250 \times 40}{100 \times 8} = 50$ Schfl., wie vorhin.

Abgekürzt:

	2
x Sch.	4 Schfl.
1ØØ M.	25Ø M.
2 8 T.	4Ø T.

$x = 25 \times 2 = 50$ Schfl.

Anmerkung.

Die Kettenrechnung heißt auch dieserhalb die Reesische Regel, weil ein Holländer, de Rees, diese Rechnungsmethode, für deren Erfinder ein gewisser Graumann insgemein gehalten wird, in einer besondern Schrift vorgetragen hat.

Schmid zeigt in seiner Rechenkunst, Leipzig 1774, den weitläuftigen Gebrauch der Kettenregel, aber nach vorausgegangenen Erklärungen der Verhältnisse und Proportionen.

Beispiele zur Uebung.

I. Wenn ein Bauherr für 48 Quadersteine, deren jeder ½ Elle breit ist, 69 Thlr. bezahlet; wie viel wird er für 258 Quader bezahlen müssen, deren jeder ¾ Elle breit ist?

gerade $\left.\begin{matrix}48 \text{ Qu.} \\ \frac{1}{2} \text{ Elle}\end{matrix}\right) : \left.\begin{matrix}258 \text{ Qu.} \\ \frac{3}{4} \text{ Elle}\end{matrix}\right) = 69$ Thlr. x Thlr.

und $x = \frac{2 \times 258 \times 3 \times 69}{1 \times 48 \times 4} = 556\frac{5}{16}$ Thlr.

II. Ein

II. Ein Capital von 216 Thlr. bringt in 3 Jahren 40 Thlr. Interessen; wie viel werden 8400 Thlr. in 12 Jahren bringen?

$$\text{gerade} \left.\begin{matrix} 216 \text{ Thlr.} \\ 3 \text{ Jahr} \end{matrix}\right) : \left.\begin{matrix} 8400 \text{ Thlr.} \\ 12 \text{ Jahr} \end{matrix}\right) = 40 \text{ Thlr. Int.} : x \text{ Int.}$$

$$\text{und } x = \frac{8400 \times 12 \times 40}{216 \times 3} = 6222\tfrac{2}{9} \text{ Thlr.}$$

II. Zusammengesetzte umgekehrte Regel de Tri.

Aufgabe.

§. 340. Die zusammengesetzte umgekehrte Regel de Tri gehörig in Ansatz zu bringen.

Auflösung.

Dieses geschiehet eben so, wie es in der vorigen Aufgabe, bei der zusammengesetzten geraden Regel de Tri, gezeiget worden ist, indem man ebenfalls die gleichartigen Dinge in ein Verhältniß zusammen bringt, und darauf Acht giebt, ob mehr oder weniger im vierten Gliede herauskommen muß.

Beispiel.

Wenn eine Verschanzung in 14 Tagen von 4000 Mann aufgeworfen wird, und man täglich 8 Stunden daran arbeitet; so ist die Frage: wie viel Tage 6420 Mann brauchen werden, wenn sie täglich 12 Stunden daran arbeiten?

Wenn wir, zur Bestimmung der Zeit, die Mannschaft mit einander vergleichen; so ist klar, daß, da im zweiten Falle mehr Mannschaft als im erstern angeleget wird, man in kürzerer Zeit fertig werden müsse; folglich ist dieses Verhältniß umgekehrt.

Vergleichen wir ferner die Zeiten mit einander, so sehen wir, daß, im zweiten Falle, täglich eine längere Zeit gearbeitet wird; also die Arbeit in weniger Tagen zu Stande gebracht werden kann; folglich auch dieser Umstand in umgekehrtem Verhältnisse sich befindet; und der Ansatz stehet nun folgendermaßen:

$$\text{Umgekehrt} \left(\begin{matrix} 6420 \text{ M.} \\ 12 \text{ St.} \end{matrix}\right) : \left.\begin{matrix} 4000 \text{ M.} \\ 8 \text{ St.} \end{matrix}\right) = 14 \text{ T.} : x \text{ T.}$$

$$\text{folglich } x = \frac{4000 \times 8 \times 14}{6420 \times 12} = 5\tfrac{785}{963} \text{ Tage.}$$

Bei-

Beispiele zur Uebung.

I. In einer blokirten Stadt hatte die Besatzung von 2000 Mann nicht länger als auf 3 Wochen Unterhalt, wenn der Mann 3 Pf. täglich auf seinen Antheil bekam. Als sich aber noch 1000 Mann hineinwarfen, und entschlossen waren, die Blokade 6 Wochen auszuhalten; so ist die Frage: Wie groß wird jetzt die Portion gemacht werden müssen?

$$\text{Umgekehrt} \begin{pmatrix} 6 \text{ Woch.} \\ 3000 \text{ Mann} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 \text{ Woch.} \\ 2000 \text{ Mann} \end{pmatrix} = 3 \text{ Pf.} : x \text{ Pf.}$$

$$\text{so ist } x = \frac{3 \times 2000 \times 3}{6 \times 3000} = 1 \text{ Pf.}$$

II. Einen Saal zu pflastern, braucht man 3420 Steine, wovon jeder 6 Zoll lang und 3 Zoll breit ist. Da man aber Steine nehmen muß, wovon jeder 9 Zoll lang und 6 Zoll breit ist; so wünscht man die nöthige Anzahl Steine in diesem Falle zu wissen.

$$\text{Umgekehrt} \begin{pmatrix} 9 \text{ Z. lang} \\ 6 \text{ Z. breit} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 6 \text{ Z. lang} \\ 3 \text{ Z. breit} \end{pmatrix} = 3420 \text{ St.} : x \text{ St.}$$

$$\text{so ist } x = \frac{6 \times 3 \times 3420}{9 \times 6} = 1140 \text{ Steine.}$$

Zusatz.

§. 341. Es können aber auch Fälle eintreten, wo die Umstände unter einander, theils in geradem, theils in umgekehrtem Verhältnisse stehen. Dergleichen Rechnungsfragen werden aber eben so aufgelöset, nachdem man jeden Umstand, wie bereits gezeiget worden, genau untersucht und verglichen hat.

Beispiel.

Ein Capital von 400 Thlr. hat in 5 Jahren 100 Thlr. Interessen gebracht; wie lange muß nun ein Capital von 500 Thalern stehen, bis es 650 Thaler Interessen gebracht hat?

Vergleichen wir jetzt blos die Capitale mit ihren Zeiten; so ist klar, daß, wenn ein größeres Capital eben so viel Interessen, als ein kleineres, bringen soll, es kürzere Zeit stehen darf. Hieraus siehet man, daß dieser Umstand zum umgekehrten Verhältnisse gehöret. Vergleichen wir aber,

bei

bei einerlei Capitalien, die Interessen mit den Zeiten; so ist klar, daß, wenn man mehr Interessen haben will, es auch längere Zeit stehen muß; daß folglich dieser Umstand im geraden Verhältnisse stehet. Daher der Ansatz:

$$\left.\begin{array}{r}\text{umgekehrt } 500 \text{ Thl. Cap.}\\ \text{gerade } 100 \text{ Thl. Int.}\end{array}\right) : \left.\begin{array}{r}400 \text{ Thl. Cap.}\\ 650 \text{ Thl. Int.}\end{array}\right) = 5 \text{ Jahr} : x \text{ J.}$$

$$\text{so ist } x = \frac{400 \times 650 \times 5}{500 \times 100} = 26 \text{ Jahr.}$$

Anmerkung.

Nach der Reesischen Regel geordnet, stehet das Beispiel also:

x J.	5 Jahr
Cap. 500 Thl.	400 Thlr.
Int. 100 Thl.	650 Thlr.
x = 26 Jahre.	

Beispiele zur Uebung.

I. Eine Garnison von 100 Mann bekömmt in 3 Tagen 40 Thlr. Löhnung. Wie lange werden 10000 Mann Löhnung bekommen können, die eine Cassa von 200000 Thlr. bei sich haben?

$$\left.\begin{array}{r}\text{gerade } 40 \text{ Thlr.}\\ \text{umgekehrt } 10000 \text{ M.}\end{array}\right) : \left(\begin{array}{r}200000 \text{ Thlr.}\\ 100 \text{ M.}\end{array}\right) = 3 \text{ T.} : x \text{ T.}$$

$$\text{so ist } x = \frac{200000 \times 100 \times 3}{40 \times 10000} = 150 \text{ Tage.}$$

II. Es verzehren 100 Mann in 4 Tagen 8 Scheffel; wie lange werden 400 Mann mit 18 Scheffeln auskommen?

$$\left.\begin{array}{r}\text{gerade } 8 \text{ Schfl.}\\ \text{umgekehrt } 400 \text{ Mann}\end{array}\right) : \left.\begin{array}{r}18 \text{ Schfl.}\\ 100 \text{ Mann}\end{array}\right) = 4 \text{ Tage} : x \text{ T.}$$

$$\text{so ist } x = \frac{4 \times 18 \times 100}{8 \times 400} = 2\tfrac{1}{4} \text{ Tag.}$$

III. Wenn 8 Mann in 4 Stunden 16 Stück 3 Fuß hohe Schanzkörbe flechten, wie viel 3½ Fuß hohe Körbe werden 100 Mann in 8 Stunden fertigen?

$$\left.\begin{array}{r}8 \text{ Mann}\\ 4 \text{ Stund.}\\ 3\tfrac{1}{2} \text{ Fuß}\end{array}\right) : \left.\begin{array}{r}100 \text{ Mann}\\ 8 \text{ Stund.}\\ 3 \text{ Fuß}\end{array}\right) = 16 \text{ Körbe} : x \text{ Körbe,}$$

$$\text{und } x = \frac{100 \times \cancel{8} \times 3 \times 2 \times \cancelto{4}{16}}{\cancel{8} \times \cancelto{1}{4} \times 7} = 342\tfrac{6}{7} \text{ Körbe.}$$

Nach

Nach der Reesischen Regel ist der Aufsatz:

	4
x Körbe	18 Körbe
8 Mann	100 Mann
4 Stund.	8 Stunden
7 Fuß	3 Fuß
	2

$$x = \frac{4 \times 100 \times 3 \times 2}{7} = 342\tfrac{6}{7} \text{ Körbe.}$$

Drittes Kapitel.

Von der Gesellschafts-, Vermischungs- und Theilungs-Rechnung.

I. Gesellschafts-Rechnung.

Erklärung.

§. 342. Wenn ein gegebenes Ganzes in eine gewisse Anzahl Theile, nach einem gegebenen Verhältnisse, eingetheilet werden soll; so heißt man diese Art von Rechnung Gesellschafts-, auch Theilungs- oder Repartitionsrechnung.

Bedient man sich dieser Rechnung, um den Gewinn oder Verlust einer Handlungsgesellschaft, nach Verhältniß der Einlage eines jeden, oder nach der Zeit, einzutheilen, so hat sie besonders den Namen Gesellschaftsrechnung erhalten. Allein, ihr Nutzen erstreckt sich viel weiter, und sie kann allemal angewendet werden, wenn man die Theile in einem gegebenen Ganzen, nach dem Verhältnisse, das sie in einem andern haben, finden will. Z. B.

Bei Vermischungen und Zusammensetzungen, bei Erbschaftstheilungen ꝛc.

Die Gesellschaftsrechnung theilet sich aber in die einfache und zusammengesetzte ein.

Fol-

Folgende Aufgabe wird uns zur Auflösung dieser verschiedenen Fälle den Weg bahnen.

A) Einfache Gesellschaftsrechnung.

Aufgabe.

§. 343. Die einfache Gesellschaftsrechnung zu verrichten.

Auflösung und Beweis.

Man bestimme dasjenige Ganze mit seinen besondern Theilen, nach deren Verhältnisse ein anderes Ganzes eingetheilet werden soll, und schließe: Wie die Summe aller Theile, oder das erste Ganze, zu dem einzutheilenden Ganzen; so verhält sich auch der erste Theil des ersten Ganzen zum ersten Theile des zweiten Ganzen. Endlich wiederhole man diese Regel de Tri so oft, als das gegebene Ganze Theile erhalten soll.

Beispiel.

Eine Gesellschaft von 3 Personen legen 20000 Thlr. $= a + b + c$ zusammen. Der erste x giebt 8000 Thlr., der zweite y 7000 Thlr., und der dritte z 5000 Thlr.

Da sie mit diesem Gelde einen Gewinst von 6000 Thlr. $= d$ machen; so ist die Frage: wie viel ein jeder von diesem Gewinste, nach Verhältniß der Einlage, bekommen müsse? Hier ist:

$$a : x = b : y = c : z.$$

$$a + b + c : x + y + z = a : x. \text{ (§. 280.)}$$

Folglich 1) $a + b + c : d = a : x.$

2) $a + b + c : d = b : y.$

3) $a + b + c : d = c : z.$

welches zu erweisen war.

Man siehet hieraus, daß die Gesellschaftsrechnung eine Anwendung des Lehrsatzes §. 282. ist. Statt dieser allgemeinen Benennung ist:

I. 20000 Thlr. : 6000 Thlr. = 8000 Thlr. : x

so ist $x = \frac{6000 \times 8000}{20000} = 2400$ Thlr.

II.

II. 20000 Thlr. : 6000 Thlr. = 7000 Thlr. : y

so ist $y = \frac{6000 \times 7000}{20000} = 2100$ Thlr.

III. 20000 Thlr. : 6000 Thlr. = 5000 Thlr. : z

so ist $z = \frac{6000 \times 5000}{20000} = 1500$ Thlr.

Probe:

2400 Thlr.	Gewinst des 1sten
2100 "	" " 2ten
1500 "	" " 3ten
6000 Thlr.	Summe des ganzen Gewinstes.

Beispiele zur Uebung.

I. In einer Festung standen 800 Hessen, 1000 Hannoveraner und 500 Holländer, welche zusammen 350 Mann täglich zur Wache geben. Wie viel wird nun jede Nation, nach der Stärke ihrer Mannschaft, täglich zum Wachdienste geben müssen?

Die Hessen geben zur Wache	= $121\frac{17}{23}$
" Hannov. " " "	= $152\frac{4}{23}$
" Holländ. " " "	= $76\frac{2}{23}$
	350 Mann.

II. Ein Detaschement, welches von 4 Compagnien formirt wird, macht 12000 Thlr. Beute. Die erste Compagnie hat 15 Mann gegeben, die zweite 9 Mann, die dritte 20 Mann, und die vierte 16 Mann. Wie groß wird nun der Antheil eines jeden dieser vier Contingente sein?

Die erste Compagnie bekommt	= 3000 Thlr.
" zweite " "	= 1800 "
" dritte " "	= 4000 "
" vierte " "	= 3200 "
	12000 Thlr.

B) Zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

§. 344. So wie sich, bei der so eben abgehandelten Gesellschaftsrechnung, die Gewinste bei einerlei Zeit, wie die Einlagen, verhielten; so müssen hingegen, bei verschiedenen Zeiten, die Gewinste nicht allein wie

wie die Einlagen, sondern auch wie die Zeit, sich verhalten, und folglich müssen die unbekannten Größen nach Größen zusammengesetzter Verhältnisse bestimmt werden; daher nun diese Rechnung die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung genannt wird.

Aufgabe.

§. 345. Eine Rechnungsfrage der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung aufzulösen.

Auflösung und Beweis.

Da, bei Rechnungsfragen dieser Art, die Zeiten verschieden sind; so multiplicire man jeden Satz mit der ihm zukommenden Zeit; so wird dadurch alles auf einerlei Zeit und auf die einfache Gesellschaftsrechnung reduciret.

Beispiel.

Es treten 2 Personen in eine Handlung zusammen. Der erste legt 4500 Thlr. $= A$ auf 6 Monat $= M.$; der andere 8000 Thlr. $= B.$ auf 4 Monate $= N.$ Sie gewinnen nun 3500 Thlr. $= G.$ Wie viel erhält jeder?

Nun ist
$$AM + BN : G = AM : x$$
$$AM + BN : G = BN : y$$

folglich verhält sich die Summe der Producte der gleichgebrachten Theile zu dem zu theilenden Ganzen, wie jedes besondere Product zu seinem zu suchenden Theile vom Ganzen. Nun ist

I. $4500 \times 6 + 8000 \times 4 : 3500 = 4500 \times 6 : x$

d. i. $59000 : 3500 = 27000 : x$

folglich ist $x = \frac{3500 \times 27000}{59000} = 1601$ Thlr. 16 gr. $8\frac{8}{59}$ pf.

II. $59000 : 3500 = 32000 : x$

folgl. ist $y = \frac{3500 \times 32000}{59000} = 1898$ Thlr. 7 gr. $3\frac{51}{59}$ pf.

Beispiele zur Uebung.

I. Vier Regimenter sollen bei Erbauung einer Festung 4500 Thlr. bekommen. Sie haben aber ihre Mannschaften auf folgende Art dazu gestellet:

Das

Das Regiment A hat 150 Mann auf 36 Tage
, , B , 210 , , 40 ,
, , C , 140 , , 54 ,
, , D , 180 , , 30 , gestellet.
Wie viel wird nun jedem Regimente, nach der Anzahl der Leute und der Zeit, gebühren?

Es ist klar, daß 150 Mann in 36 Tagen eben so viel arbeiten werden, als 36mal 150, nämlich 5400 Mann in einem Tage. Das nämliche gilt auch bei den übrigen Sätzen; folglich, wenn man die Mannschaft, in jedem Satze, mit der ihr bestimmten Zeit multipliciret; so ist alles auf einerlei Zeit reduciret, und es finden folgende vier Ansätze Statt:

A.	= 150 M.	× 36 Tage	=	5400
B.	= 210 ,	× 40 ,	=	8400
C.	= 140 ,	× 54 ,	=	7560
D.	= 180 ,	× 30 ,	=	5400
				26760

A. $26760 : 4500 = 5400 : x = 908\frac{16}{223}$ Thlr.
B. $26760 : 4500 = 8400 : x = 1412\frac{124}{223}$ Thlr.
C. $26760 : 4500 = 7560 : x = 1271\frac{67}{223}$ Thlr.
D. $26760 : 4500 = 5400 : x = 908\frac{16}{223}$ Thlr.
4500 Thlr.

II. Bei einer Belagerung sind 4 Officiers 2 Tage; 6 Unterofficiers 4 Tage; 12 Grenadiers 6 Tage, und 20 Gemeine 8 Tage lang freiwillig in den Laufgräben gewesen, und man hat ihnen dafür 910 Thlr. zugestanden, welche, nach Verhältniß ihrer Anzahl, der Zeit und monatlichen Gehaltes unter sie getheilt werden sollen. Es bekommt aber ein Officier 12 Thlr., ein Unterofficier 4 Thlr., ein Grenadier 3 Thlr., und ein Gemeiner 2 Thlr.

Nun ist die Frage:
1) was die Officiers, Unterofficiers ꝛc. überhaupt,
2) was ein jeder bekommen, und,
3) wie hoch es jeder täglich gebracht?

II. Vermischungsrechnung.

Erklärung.

§. 346. Die Vermischungsrechnung ist von der Gesellschaftsrechnung nur dem Objecte nach unterschieden,

den, und gründet sich ebenfalls auf die allgemeine Aufgabe: ein Ganzes in eine gegebene Anzahl Theile, nach einem gegebenen Verhältnisse, einzutheilen; denn man findet hier ebenfalls, aus den gegebenen Verhältnissen der Ingredienzien, ihre Quantitäten für eine gegebene Quantität der Mischung, welches nicht anders geschehen kann, als wenn man die verschiedenen Ingredienzien ebenfalls zusammen addirt, und so viel Proportionen ansetzt, als Ingredienzien gegeben sind.

Beispiel.

Wenn man bei Verfertigung des Schießpulvers auf 1 Pf. Salpeter, 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel nimmt; wie viel wird man von jedem mehr nehmen müssen, um 100 Pf. zu machen? So ist:

1 Pf. =	32 Loth	Salpeter.
	6 „	Kohlen.
	4 „	Schwefel.
	42 Loth	Summa.

I. $42 : 32 = 100 : x$

so ist $x = \frac{32 \times 100}{42} = 76^{4}$ Pf. Salpeter.

II. $42 : 6 = 100 : x$

so ist $x = \frac{6 \times 100}{42} = 14\frac{6}{21}$ Pf. Kohlen.

III. $42 : 4 = 100 : x$

so ist $x = \frac{4 \times 190}{42} = 9\frac{11}{21}$ Pf. Schwefel.

Probe:

$76\frac{4}{21}$	Pf.	Salpeter.
$14\frac{6}{21}$	„	Kohlen.
$9\frac{11}{21}$	„	Schwefel.
100	Pf.	Summa.

Beispiel zur Uebung.

Wenn, zu dem Kanonenmetalle, auf 100 Pf. Kupfer, 9 Pf. Zinn und 6 Pf. Messing gerechnet werden; so ist die Frage: wie viel zu dem Gusse einer halben Karthaune, wozu

wozu 4800 Pf. erforderlich sind, von jeder dieser erwähnten Materien genommen werden muß?

$4173\frac{21}{23}$ Pf. Kupfer.
$375\frac{15}{23}$ „ Zinn.
$250\frac{10}{23}$ „ Messing.
4800 Pf. Summa.

III. Theilungs- und Erbschaftsrechnung.

Erklärung.

§. 347. Die Theilungsrechnungen, sowohl bei Feldern, Erbschaften, als andern Dingen, haben ebenfalls ihren Grund in der Gesellschaftsrechnung, wie folgende Beispiele zeigen werden.

1. Beispiel.

Drei Personen sollen einen Acker, oder 300 Quadratruthen, dergestalt unter sich theilen, daß der erste, A, $\frac{1}{2}$, der zweite, B, $\frac{3}{4}$, und der dritte, C, $\frac{2}{3}$ bekommt. Wie viel Quadratruthen bekommt nun jeder?

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{23}{12}.$$

A) $\frac{23}{12} : \frac{1}{2} = 300$ Q. R. : x Q. R.
so ist $x = \frac{12 \times 300}{23 \times 2} = 78\frac{6}{23}$ Q. R.

B) $\frac{23}{12} : \frac{3}{4} = 300$ Q. R. : x Q. R.
so ist $x = \frac{12 \times 3 \times 300}{23 \times 4} = 117\frac{9}{23}$ Q. R.

C) $\frac{23}{12} : \frac{2}{3} = 300$ Q. R. : x Q. R.
so ist $x = \frac{12 \times 2 \times 300}{23 \times 3} = 104\frac{8}{23}$ Q. R.

Probe:

$78\frac{6}{23}$
$117\frac{9}{23}$
$104\frac{8}{23}$
300 Quadratruthen.

2. Beispiel.

§. 348. Es sind 4 Personen unter der Bedingung zu Erben eingesetzt, daß A $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$, C $\frac{1}{6}$, und D $\frac{3}{4}$, von der Erb-

Erbschaft, die sich auf 4000 Thlr. beläuft, bekommen soll; was wird jeder bekommen?

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{21}{12} = \tfrac{7}{4}.$$

A $\tfrac{7}{4} : \tfrac{1}{2}$ = 4000 Thlr. : x Thlr.

so ist $x = \frac{4 \times 1 \times 4000}{7 \times 2} = \frac{8000}{7} = 1142\tfrac{6}{7}$ Thlr.

B $\tfrac{7}{4} : \tfrac{1}{3}$ = 4000 Thlr. : x Thlr.

so ist $x = \frac{4 \times 1 \times 4000}{7 \times 3} = \frac{16000}{21} = 761\tfrac{19}{21}$ Thlr.

C $\tfrac{7}{4} : \tfrac{1}{6}$ = 4000 Thlr. : x Thlr.

so ist $x = \frac{4 \times 1 \times 4000}{7 \times 6} = \frac{8000}{21} = 380\tfrac{20}{21}$ Thlr.

D $\tfrac{7}{4} : \tfrac{3}{4}$ = 4000 Thlr. : x Thlr.

so ist $x = \frac{4 \times 3 \times 4000}{7 \times 4} = \frac{12000}{7} = 1714\tfrac{2}{7}$ Thlr.

Probe:

		(3	21
A.	=	1142 $\tfrac{6}{7}$	18
B.	=	761 $\tfrac{19}{21}$	19
C.	=	380 $\tfrac{20}{21}$	20
D.	=	1714 $\tfrac{2}{7}$	6
		4000 Thl.	$\tfrac{63}{21}$ = 3 Ganze.

Beispiel zur Uebung.

Wenn 4 Dörfer eine Brandschatzung von 4000 Thalern, nach dem Verhältnisse ihres Steuerfußes, geben sollen; z. B. das Dorf A gäbe 20 Thaler, B 30 Thaler, C 40 Thaler, D 50 Thaler zu den Steuern; wie viel wird nun jedes Dorf dazu legen müssen?

A	giebt	571 $\tfrac{3}{7}$	Thaler
B	.	857 $\tfrac{1}{7}$	.
C	.	1142 $\tfrac{6}{7}$	.
D	.	1428 $\tfrac{4}{7}$	.
		4000 Thaler.	

Anmerkung.

Man siehet, daß man, durch Hülfe der Gesellschaftsrechnung, nicht allein den Gewinn und Verlust, z. B. bei Compagniehandlungen, Theilungen, finden kann, sondern daß sie auch noch bei Concursen, Repartitionen rc. gebraucht wird. Auch die Berechnung der Brandcollecten gehört hieher, wobei oft der mittlere Repartitionsfuß gesucht werden muß.

IV.

IV. Von einigen andern von den Proportionen abhängenden Rechnungen.

A) Alligationsrechnung.

Erklärung.

§. 349. Die Alligationsrechnung lehrt den mittlern Preis einer Mischung verschiedener Arten von Dingen zu finden, davon jede Anzahl und Werth einzeln gegeben sind, oder zu bestimmen, in welcher Proportion man von jedem der Dinge, die in die Mischung kommen sollen, nehmen muß, wenn man den Werth oder Gehalt eines jeden von diesem und den Werth oder Gehalt der Mischung kennt. Um den mittlern Preis von verschiedenen Arten von Dingen, deren Anzahl und Werth man kennt, zu finden, multiplicire man den Werth eines Dinges von jeder Art durch die Anzahl der Dinge von dieser Art, addire alle Producte, und dividire die Summe durch die ganze Anzahl der vermischten Dinge.

Beispiel.

Ein Officier übernimmt:

1500 Schfl. Hafer	à 1 Thlr.	20 gr.;	desgleichen
2500 " "	à 1 "	— "	und
3000 " "	à 1 "	8 "	

er mischt aus diesen 3 Lieferungen eine Sorte; wie hoch ist von dieser Mischung der Scheffel in Rechnung zu führen?

Man verfährt folgendergestalt:

1500 Schfl.	= 2750 Thlr.
2500 "	= 2500 "
3000 "	= 4000 "
7000 Schfl.	9250 Thlr.

Dividiret man nun die Summe der Producte = 9250 Thlr. durch 7000 Schfl., so ist der Quotient $1\frac{9}{28}$ Thlr. der Preis von einem Scheffel in der Mischung.

Der

Der Beweis von dieser Methode ist die Regel de Tri, denn die Summe der Scheffel verhält sich zu der Summe ihrer Werthe, wie ein Scheffel der Mischung sich zum mittlern Preise verhält; oder:

$$7000 \text{ Schfl.} : 1 \text{ Schfl.} = 9250 \text{ Thlr.} : x \text{ Thlr.}$$

$$\text{wo } x = \frac{1 \times 9250}{7000} = 1\tfrac{2}{8} \text{ Thlr.}$$

Anmerkung.

Die Regel Cöci lehrt uns noch verwickeltere Rechnungsfragen dieser Art auflösen; der Zweck des Lehrbuches erlaubt es aber nicht, dieselben hier abzuhandeln. Die Algebra zeigt weit kürzere Wege, um zu diesem Zwecke zu gelangen.

B) Regel falsi.

Erklärung.

§. 350. Die sogenannte Regelfalsi dienet, vermittelst einer angenommenen Zahl, welche man den Bedingungen der Frage unterwirft, eine verlangte Zahl zu finden. Z. B. Man wollte wissen, welches die Zahl wäre, deren Hälfte, Drittel und Viertel zusammengenommen, 26 ausmachen. Man nehme an, diese Zahl wäre 12, die Hälfte davon wäre 6, ihr Drittel 4, und ihr Viertel 3. Da nun $6 + 4 + 3 = 13$; so siehet man, daß diese Annahme falsch ist; jedoch wird sie dazu dienen, die wahre gesuchte Zahl zu finden; denn die Zahl 13 ist eben so aus Theilen von 12, wie die Zahl 26 aus Theilen der gesuchten Zahl zusammengesetzt; mithin verhält sich die angenommene Zahl zur gesuchten, wie $13 : 26$ oder $13 : 26 = 12 : x = \frac{12 \times 26}{13} = \frac{312}{13} = 24$.

Denn die Hälfte, das Drittel und das Viertel von 24 ist $12 + 8 + 6 = 26$.

1. Anmerkung.

Die Algebra zeigt leichtere Wege, die zu dieser einfachen, als auch zur doppelten Regelfalsi gehörigen, Aufgaben aufzulösen.

2. Anmerkung.

In den practischen Rechnungsbüchern werden noch verschiedene andere Rechnungsregeln, die aber mehr den Kaufmann, Statistiker rc., als den Militair angehen, gelehret. Dahin gehören:

a) Die Tauschrechnung, wenn eine Waare gegen eine andere vertauscht und umgesetzt wird, um zu bestimmen, von welcher Waare mehr oder weniger gegeben werden muß.

b) Die Tararechnung, wo das Gewicht der Fässer, Säcke, überhaupt die Emballage, vom ganzen Gewichte abgezogen wird, um das Gewicht der Waare allein zu bekommen.

Ist unter der Waare Unreinigkeit, die mit gewogen worden ist; so muß dieses Gewicht auch abgezogen werden, um das Gewicht der reinen Waare zu haben. Das Gewicht der Waare mit der Emballage heißt: Brutto, Sporco, Unlauter; der reinen Waare aber: Netto, Lauter und Brutto — Netto = Tara.

c) Die Regelfusti. Diesen Nahmen führt diejenige Rechnung, wo bestimmt wird, was vom Gewichte und dem Werthe einer Waare abgezogen werden muß, wenn sie etwa durch Wasser rc. Schaden gelitten hätte.

d) Die Rabattrechnung ist im Allgemeinen das, was von einer Summe, die vor der Verfallzeit bezahlt wird, abgezogen werden muß.

Ferner gehören hieher noch die Wechsel- Cassir- Factorei- Abzugs- Zeit- Steuerrechnung rc., deren Zweck schon die Benennung anzeigt. Ueberhaupt ist aber zu merken, daß, wer die Lehre von den Proportionen völlig in seiner Gewalt hat, ohne gehäufte Regeln und Beispiele, Rechnungsfragen von mancherlei Art aufzulösen im Stande sein wird, und wem jene Lehren fehlen, der wird, durch Beispiele, nur mechanisch gebildet.

Viertes Kapitel.

Von der Reductionsrechnung.

Erklärungen.

§. 351. Jede Nation, ja oft jede Provinz, hat eine gewisse Einheit angenommen und in Theile getheilet, wornach sie die, im bürgerlichen Leben vorkommenden, Dinge ausmißt. Wir ersehen aber aus den beigefügten Tafeln, daß darin eine große Verschiedenheit herrscht, so, daß man oft genöthiget ist, Maase und Gewichte in andere zu verwandeln, welches aber nur

durch Hülfe der Verhältnisse geschehen kann, welche man vorher wissen muß, und wozu uns freilich solche Tafeln hülfreiche Hand leisten müssen.

§. 352. Das Verhältniß kann aber entweder unmittelbar bekannt seyn, und die Aufgabe kann, vermittelst eines einzigen Ansatzes, aufgelöset werden, oder, es liegen mehrere Proportionen zum Grunde, die nicht in den Tafeln enthalten sind, sondern vermittelst anderer, dazwischen sich befindenden Verhältnisse gesucht werden müssen, welche sich aber dessen ungeachtet in einen einzigen Ansatz zusammenziehen lassen.

Die erstere Art heißt, die einfache; die letztere hingegen, die zusammengesetzte Reductionsrechnung, oder auch, die Kettenrechnung.

§. 353. Die Reduction der Gewichte und der Längenmaase sind die vorzüglichsten, die hier erwähnet werden müssen, weil niemand, ohne die Kenntniß derselben, in der angewandten Mathematik, und also auch in den verschiedenen Theilen der Kriegswissenschaften, fortkommen kann. Zu dieser Absicht werden uns die folgenden Reductionstafeln dienen, in welchen wir uns mit den Verhältnissen einiger der vornehmsten Längenmaase und Gewichte bekannt machen können, und vermöge welcher man leicht gewisse Längen, Gewichte ꝛc. auf andere verlangte Längen, Gewichte ꝛc., durch Hülfe der Regel de Tri, reduciren und vergleichen kann; daher diese Rechnungsart auch die Reductionsrechnung genannt wird.

I. Einfache Reductionsrechnung.

Erklärung.

§. 354. Ehe wir zu den Aufgaben der einfachen Reductionsrechnung schreiten, müssen wir uns erst mit den Vergleichungs- oder Reductionstafeln und deren

ren Gebrauche bekannt machen, und zuerst die Längenmaase vor uns nehmen.

Folgende erste Vergleichungstafel zeigt uns die Verhältnisse der vornehmsten Fußmaase, wobei der ehemalige königlich-französische Fuß, als bekannt, zum Grunde gelegt ist. Dieser pariser Fuß ist in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie aber nicht, wie gewöhnlich, in 12 Scrupel, sondern in 10 Theile, welche Puncte (Points) heißen, getheilt; daher machen auch 1440 Puncte die Länge eines pariser Fußes aus. In verschiedenen Tafeln hat man noch eine Eintheilung von 10 hinzugefügt, so daß 14400 gleiche Theile die Länge des französischen Fußes ausmachen, und darnach ist die Länge der übrigen Fußmaase berechnet und angegeben worden. Wenn also beim leipziger Fuße die Zahl 12530 stehet; so heißt das: der leipziger Fuß ist 12530 Theile des französischen Fußes lang.

I. Tafel

zur Vergleichung der vornehmsten Fuß-Maase.

Namen der Oerter.	Theile, deren 14400 einen pariser Fuß machen.	Namen d. Oerter.	Theile, deren 14400 einen pariser Fuß machen.
Der augsburger	13129	Der dresdner	12545
• basler	13260	• frankf. a. M.	12700
• baiersche	12940	• hall. Werkfuß	12795
• berliner	13730	• — Feldfuß	19192, 1
• braunschweig.	12600	• hamburger	12700
• breslauer	12600	• hannöverische	12953
• brüßler	12900	• Lachter zu Eisleb.	89150
• calenberger n. Hogreve	12916	• • in Clausthal	85280
• constantinop.	31400	• leipziger	12530
• copenhagner.	13920	• londner	13513
• dänische	13913	mannheimer	12865
		• moskauische	14830

Der

Namen der Oerter.	Theile, deren 14400 einen pariser Fuß machen.	Namen d. Oerter.	Theile, deren 14400 einen pariser Fuß machen.
Der nürnberger	13470	Der schwed. Fuß	
• prager	13360	• n. Celsius	13159
• rheinländische		• spanische	12530
n. Eisenschmidt	13913	• — Palmos	9400
• römische alt	13090	• stuttgardter	12680
— 625 machen		nach Meyer	12780
ein Stadium	13060	• strasburger	12820,8
— neue Palmo	9903	• turiner	14320
• russische	23856	— Piede di	
• savoysche	12000	Liprando	
• schwed. Fuß		n. Beccaria	22770
n. Eisenschmidt	13165	— n. Tempelhof	22737
• n. Danville	13160	• Wiener	1401

1. Zusatz.

§. 355. Nach dieser Tafel verhält sich z. B.
der Pariser Fuß : Leipziger Fuß 1440 : 1252.
multiplicirt man nun die äußern und mittlern Glieder zusammen; so erhält man:

1252 pariser Fuß = 1440 leipziger Fuß.

Diesen Ausdruck nennt man gewöhnlich den Reductionssatz. Hieraus siehet man, daß, wenn ein Verhältniß bekannt ist, man sehr leicht eine gegebene Anzahl Fuß, vermittelst des Reductionssatzes, nach den Regeln der Proportion, finden kann.

Anmerkung.

Alle kleinern Längenmaase der Griechen und Römer, eben so wie das Fußmaas, sind von den Abmessungen der Glieder des menschlichen Körpers hergenommen. Eine Mannslänge, eine Klafter, die Toise der Franzosen, faßt 6 Fuß oder 4 Ellnbogen, so wie ein Fuß 12 Daumenbreiten oder Zolle. Der Grund also, warum die Fußmaase in den verschiedenen Ländern verschieden sind, mag wohl zunächst in der gegebenen natürlichen Eintheilung liegen.

2. Zusatz.

§. 356. Da, nach der in §. 106. gegebenen Uebersicht, die Eintheilung der Ruthen, Fuß ꝛc. sowohl zwölf- als zehntheilig ist; so können wir nun auch sehr leicht ein

Maas in das andere verwandeln. Wenn, nach der zum Grunde gelegten Eintheilung, die Ruthen von gleicher Größe sind; so folgt, daß 10 Decimal- oder zehntheilige Fuß = 12 Duodecimal- oder zwölftheilige Fuß, 100 Decimalzolle = 144 Duodecimalzollen, 1000 Decimallinien = 1728 Duodecimallinien u. s. w. sind.

Bei dieser Eintheilung sind, wie man siehet, die Decimalfuß größer, als die Duodecimalfuß ꝛc.

Zur Verkürzung bedienen wir uns folgender Zeichen bei den Ruthenmaasen. Ruthe mit R., Fuß mit F., Zoll mit Z., Linie mit L. u. s. w., wobei aber bemerket werden muß, ob es Decimal- oder Duodecimalmaas ist.

1. Anmerkung.

Was hier vom Längenmaase gesagt worden ist, gilt auch von den Flächen- und Körpermaasen, davon in der Geometrie, an seinem Orte, mehr gesagt werden wird.

2. Anmerkung.

Vielleicht ist es nicht überflüssig, eine Uebersicht einiger der vorzüglichsten, nach der ersten Verhältnißtafel, nach Dresdner Zollen berechneten Fußmaase hier anzuzeigen, wobei die Dresdner Elle zu 250,9 Pariser Linien angenommen ist.

Der	berliner Fuß	13	Dr. Zoll	$1\frac{1511}{2509}$	Linien
=	bayerische =	12	=	= $4\frac{1300}{2509}$	=
=	ehemalige französische	13	=	= $9\frac{735}{2509}$	=
=	londner =	12	=	= $11\frac{2794}{25090}$	=
=	nürnberger =	12	=	= $10\frac{1550}{2509}$	=
=	prager =	12	=	= $9\frac{891}{2509}$	=
=	rheinländische =	13	=	= $3\frac{8817}{12545}$	
=	wiener =	13	=	= $4\frac{2048}{2509}$	=

3. Anmerkung.

Statt der in den Tafeln angegebenen Verhältnißzahlen kann man sich auch der Logarithmen dieser Zahlen bedienen, weil dadurch die Rechnung abgekürzt wird.

3. Zusatz.

§. 357. Der Infanterieofficier kommt, besonders im Kriege, selten in den Fall, Fußmaase zu brauchen. Ihm sind die Schritte bequemer als jene Maase; daher ist es nöthig, hier noch des Schrittmaases zu erwähnen. Die Schritte werden gemeiniglich in gemeine und geometrische

Schritte

Schritte eingetheilt. Der gemeine Schritt beträgt 2 bis 2½ rheinl. Fuß, bald mehr oder weniger, je nachdem ein Mensch weiter als der andere schreitet. Dieser Schritt heißt auch der einfache Schritt. Zwei solcher einfachen Schritte, als 4—5 Fuß rheinl., machen einen doppelten oder geometrischen Schritt aus (Passus).

Anmerkung.

Der militärische Schritt ist in den verschiedenen Armeen vorgeschrieben, um dadurch eine Gleichförmigkeit, als ein Hülfsmittel zur Richtung, zu bewirken. In sächsischen Diensten ist er 1¼ Elle, oder 2 Fuß 6 Zoll Dresdner Ellenmaas. In der preußischen Armee 2 Fuß und 4 Zoll rheinl. Duodecimalmaas. Da in einer Minute 75 solcher Schritte gemacht werden sollen; so ist es leicht, die Länge des Raumes zu bestimmen, welcher in einer gegebenen Anzahl Minuten zurückgelegt werden kann, und so auch umgekehrt.

§. 358. Für den Militair wird es nicht ohne Nutzen seyn, einige der vorzüglichsten kaufmännischen Längenmaase verschiedener Oerter in einer Tafel zu finden, die durch Ellen in pariser Linien angegeben sind. Die Berliner Elle liegt hier als Einheit der Vergleichung zum Grunde.

II. Tafel

zur Vergleichung einiger Ellenmaase, in pariser Linien ausgedrückt; verglichen mit der berliner Elle = 1.

Namen d. Oerter.	pariser Linien.	Einer berlin. Elle f. gleich.	Namen d. Oerter.	pariser Linien.	Einer berlin. Elle f. gleich.
Amsterd. 1 Elle	304,6	0,970	Cassel, 1 Elle	248,8	1,188
Berlin, Halle,			Constantinopel,		
Königsberg,			— 1 gr. Piek	296,3	0,997
Stettin, 1 Elle	295,6	1	— 1 kl. Piek	286,9	1,030
Brabant, 1 Elle	306,5	0,964	Copenh. 1 Elle	278,1	1,062
Braunschweig,			Danzig, 1 Elle	254,2	1,162
1 Elle	253	1,168	Dresden, 1 Elle	250,9	1,176
Breslau, 1 Elle	243,8	1,212	Erfurt, 1 gr. Elle	243,7	1,212
Brüssel, 1 gr.			— — 1 kl. Elle	179	1,651
Elle,	307,8	0,960	Frankf. a. Main		
- - 1 kl. Elle	203,4	0,974	alte Elle	239,2	1,235

Namen

Namen d. Oerter.	pariser Linien.	Einer berlin. Elle gleich.	Namen d. Oerter.	pariser Linien.	Einer berlin. Elle gleich.
Frankf. an der Oder, alte Elle	294,1	1,005	Neapel, 1 Canne	935,6	0,315
Genua, 1 Bracce	259,6	1,138	Nürnberg, 1 Elle	292,4	1,010
Götting. 1 Elle	258	1,145	Paris, 1 Aune in Leinw.	255,3	1,157
Gotha, 1 Elle	250,6	1,179	Pisa, 1 Palme	132,3	2,236
Hamburg, 1 Elle	254	1,163	Prag, 1 Elle	262,6	1,125
Hannov. 1 Elle	258	1,145	Regensb. 1 Elle	395,5	0,822
Leipzig, 1 Elle	250,6	1,179	Riga, 1 Elle	242,9	1,217
Lissabon, 1 Vara	485,2	0,609	Rom, 1 Bracce in Leinw.	281,3	1,050
London, 1 Elle Leinw.	506,9	0,583	Sardin. u. Savoyen, 1 Rase	263,1	1,123
„ 1 Yard	405,5	0,728	Schlesien, 1 Elle	255,3	1,157
„ 1 Gode Frieß	311	0,980	Stockh. 1 Elle	262,9	1,124
Madrid, 1 Vara	376,7	0,768	Warschau, 1 Elle	273	1,082
Magdeb. 1 alte Elle	258,6	1,143	Wien, 1 Elle	344,5	0,858

§ 359. Folgende Vergleichungstafel enthält einige der vornehmsten Pfunde, sowohl in Granen, deren, nach Claußberg, 7680 ein leipziger Pfund machen, als auch, nach Vega, in Assen des holländischen Troygewichtes, 9728 aufs Pfund berechnet.

III. Tafel,
zur Vergleichung der Gewichte.

Ein Pfund in	wiegt in leipzig. Granen	in Assen	Ein Pfund in	wiegt in leipzig. Granen	in Assen
Amsterdam	8125	10279	Bourdeaux	8085	10228
Augsburg, gr. Gewicht	8088	10232	Braunschweig	7680	9710
„ kl. Gewicht	7776	9837	Breslau	6667	8434
Bautzen	7130	9020	Brüssel	7710	9697
Berlin	7697	9748	Cassel	5202	6589

Ein

Ein Pfund in	wiegt in leipzig. Granen	in Assen	Ein Pfund in	wiegt in leipzig. Granen	in Assen
Constantinop.			Magdeburg	7695	9748
• Ok	20865	26390	Mannheim	8130	10299
• Cheky	5236		München	9225	11671
Copenhagen	7716	10388	Paris	8065	10202
Crakau	6660	8426	Petersburg	6723	8512
Dresden	7680	9716	Prag	8450	10690
Erfurt	7754	9822	Regensburg	9225	11671
Frankf. a. M.	7680	9720	Rom	5581	7345
Freiberg	8815	11166	Rußland	6720	8512
Genua kl. Gw.	5208	6720	Sardinien	6587	8343
• gr. Gew.		7140	Schweden,		
Haag	8125	10279	Victualgew.	6985	8848
Halle	7697	9748	Bergw.gew.	6175	7822
Hamburg	7980	10080	Eisengew.	5588	7078
Hannover	7977	10129	Spanien	7563	9580
Leipzig	7680	9716	Strasburg	7755	9812
Lissabon	7552	9560	Turin	6063	7680
Livorno	5605	7131	Warschau,		
London avoir			gr. Gew.	6666	
du poids	7434	9439	kl. Gew.	6215	7863
Königsgew.		14166	Wien	9240	
Lübeck	7950	10059	• nach Vega	9215	11672
Lüneburg	8000	10125	Zittau	7695	9735
Madrid	7563	9580			

Zusatz.

§. 360. Vermittelst dieser Tafel findet man das Verhältniß einiger der gewöhnlichsten Pfunde. So verhält sich, in Granen des leipziger Pfundes, z. B.

berliner Pfund : londner Pfund = 7697 : 7434.

Die Producte der äußern und mittlern Glieder dieser Proportion geben 7434 berliner Pfunde = 7697 londner Pfunden. Eben so in Assen holl. Troygewichts.

Nun verhält sich

berliner Pfund : londner Pfund = 9748 : 9439;
folglich sind 9439 berl. Pf. = 9748 london. Pf.

Auf-

Aufgabe.

§. 361. Die Reductionsrechnung zu verrichten.

Auflösung.

Dieses kann auf zweierlei Art geschehen: a) vermittelst der in den Tafeln gegebenen Verhältnisse, oder b) vermittelst des Reductionssatzes. (§. 355.) In beiden Fällen sucht man zu den 3 bekannten Sätzen das vierte Proportionalglied, nach den bereits darüber gegebenen Regeln.

Beispiel.

Es sind 40 leipziger Fuß gegeben; wie viel machen solche rheinländische aus?

a) Nach der ersten Tafel verhält sich
der leipz. Fuß : rheinl. Fuß = 12520 : 13913.

Da nun der rheinländische Fuß größer als der leipziger Fuß ist, und folglich weniger rheinländische herauskommen müssen; so stehet der Ansatz also:

rheinl. F. : leipz. F. = leipz. F. : rheinl. F.
13913 : 12520 = 40 : x

$$\text{und } x = \frac{12520 \times 40}{13913} = \frac{500800}{13913} = 35\tfrac{13845}{13913} \text{ rheinl. F.}$$

b) Da leipz. F. : rheinl. F. = 12520 : 13913, so sind 13913 leipz. Fuß = 12520 rheinl. Fuß, und der Ansatz also:

13913 leipz. F. : 40 leipz. F. = 12520 rheinl. F. : x rheinl. F.

$$\text{und } x = \frac{40 \times 12520}{13913} = \frac{500800}{13913} = 35\tfrac{13845}{13913}$$

1. Zusatz.

§. 362. Man siehet hieraus, daß die Namen der Größen, in gerader Proportion, die Verhältnißzahlen selbst aber in umgekehrter Proportion stehen, und daß es übrigens einerlei ist, welcher von beiden Arten man sich bedienen will.

2. Zusatz.

§. 363. Auf dieselbe Art kann man auch zehntheiliges Maas in zwölftheiliges, und so umgekehrt, verwandeln. Z. B. Es sind 8 Fuß, 7 Zoll, 5 Linien zehn-
thei-

theiliges Maas in zwölftheiliges Maas zu verwandeln; so ist:

1000 Dec. Lin. : 875 Dec. L. = 1728 Duodec. L. : x Duod. L.

und $x = \frac{875 \times 1728}{1000} = \frac{1512000}{1000} = 10$ F. 6 Z. Decimalmaas; und so auch umgekehrt.

3. Zusatz.

§. 364. Wenn, wie z. B. bei den Münzen, die Verhältnisse gerade in keinen Tafeln enthalten, oder auch, wie in diesem Falle, nicht bleibend sind, sondern sich nach dem jedesmaligen Wechselcours verändern; so muß man sich die Werthe derselben bekannt machen, und daraus ein Verhältniß formiren. Z. B. Man wollte wissen, wie viel 200 meißnische Gülden Thaler ausmachten; so weiß man, daß ein solcher Gülden 21 Groschen, ein Thaler aber 24 Groschen hält; folglich verhält sich:

1 Gülden : 1 Thaler = ~~21~~ : ~~24~~
3) 7 8

da also 8 Gülden = 7 Thaler (§. 355.) so ist der Ansatz:

8 Gülden : 200 Gülden = 7 Thaler : x Thaler

und $x = \frac{200 \times 7}{8} = 175$ Thaler.

Nach obigem Verhältnisse verhält sich der Gülden zum Thlr. = 7 : 8. Da nun der Thaler größer ist als der Gülden; so steht das Verhältniß:

8 : 7 = 200 Gülden : x Gülden,

und $x = \frac{7 \times 200}{8} = 175$ Thlr.

Beispiele zur Uebung.

I. Wenn der preußische Soldat 28 rheinl. Zoll ausschreitet; wie viel wird dieses in einer Minute, wenn er in derselben 75 Schritt macht, nach sächs. Ellen betragen?

28 rheinl. Z. × 75 = 2100 Z. = 175 rheinl. F.

Nun ist, nach dem Verhältnisse:

12520 : 13913 = 175 rheinl. F. : x leipz. F.

und $x = \frac{13913 \times 175}{12520} = 194\frac{1172}{2504} = 97\frac{1174}{2504}$ leipz. Ell.

II. Der

II. Der ehemalige französische Fuß verhält sich zu der dresdner Elle wie 144,0 : 250,9, nämlich 2509 französische Fuß betragen 1440 dresdn. Ellen, wie lang sind nun 6 französische Fuß, nämlich eine Toise in dresdner Maase?

$$2509 : 1440 = 6 \text{ franz. F.} : x \text{ dresdn. Ell.}$$

$$\text{und } x = \frac{1440 \times 6}{2509} = 3 \text{ Ellen, } 10 \text{ Zoll, } 7,757 \text{ Linien.}$$

III. Ein Regimentsquartiermeister hat 5000 Berliner Ellen Tuch eingekauft, und soll es nach Dresdner Ellen an 4 Compagnien liefern, wie viel erhält nun jede Compagnie?

Die dresdn. Elle : berliner Elle = 250,9 : 295,6
folglich sind 295,6 dresdn. Ellen = 250,9 berl. Ellen
u. daher 2509 berl. Ell. : 2956 dr. Ell. = 5000 b. E. : x dr. E.

$$\text{und } x = \frac{2956 \times 5000}{2509} = 5890\tfrac{1990}{2509} \text{ dresdn. Ellen}$$

$$= 5890 \text{ Ellen } 11\tfrac{161}{2509} \text{ Zoll}$$

folgl. 5890 Ell. $11\frac{161}{2509} : 4 = 1472$ Ell. $14\frac{1922}{2509}$ Zoll erhält jede Compagnie.

II. Zusammengesetzte Reductions- oder Kettenrechnung.

§. 365. So wie, bei der einfachen Reductionsrechnung, die Aufgabe durch einen Ansatz aufgelöst werden kann; so müssen, bei der zusammengesetzten, da mehr Verhältnisse zwischen der gegebenen und gesuchten Größe Statt finden, auch eben so viel Ansätze gemacht werden; allein man kann, wie wir sogleich sehen werden, das nämliche, wie bei der zusammengesetzten Regel de Tri, durch einen Ansatz bewerkstelligen, in welchem diese Verhältnisse zusammengezogen werden.

Aufgabe.

§. 366. Die zusammengesetzte Reductionsrechnung zu verrichten.

Auflösung.

Dieses kann auf verschiedene Art geschehen:

A) Durch mehrere Ansätze:

Man sucht zum ersten Verhältnisse und zu der folgenden Zahl die vierte Proportionalzahl, und ferner, zu dem zweiten Verhältnisse und der so eben gefundenen Zahl ebenfalls die vierte Proportionalzahl, und so fort.

Beispiel.

Wenn, nach dem Reductionssatze, 5 brabanter Ellen 6 leipziger Ellen ausmachen; so wird gefragt: wie theuer 15 brabanter Ellen zu stehen kommen, wenn 6 leipziger Ellen 8 Thlr. kosten?

Durch 2 Ansätze würde man folgendergestalt verfahren müssen:

I. 5 b. E. : 6 l. E. = 15 b. E. : x l. E.

so ist $x = \frac{6 \times 15}{5} = 18$ l. E.

II. 6 l. E. : 18 l. E. = 8 Thlr. : x Thlr.

so ist $x = \frac{18 \times 8}{6} = 24$ Thlr.

B) Durch Einen Ansatz:

Wenn man diese Operation durch den Ausdruck vorstellet; z. B.

I. 5 b. E. : 6 l. E. = 15 b. E. : x l. E. = $\frac{6\text{ l. E.} \times 15\text{ l. E.}}{5\text{ b. E.}}$

II. 5 b. E. : $\frac{6\text{ l. E.} \times 15\text{ b. E.}}{5\text{ b. E.}}$ = 8 Thlr. : x Thlr.

so erkennt man das Resultat durch den Ausdruck:

$$\frac{6\text{ l. E.} \times 15\text{ b. E.} \times 8\text{ Thlr.}}{5\text{ b. E.} \times 6\text{ l. E.}} = x.$$

Wenn man diese Ansätze und den Ausdruck betrachtet; so wird man sogleich wahrnehmen, daß derselbe mit dem bei der zusammengesetzten Regel de Tri (§. 338.) gegebenen völlig übereinkommt:

$$\left.\begin{matrix}5 \text{ b. E.}\\ 6 \text{ l. E.}\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}6 \text{ l. Ell.}\\ 8 \text{ Thlr.}\end{matrix}\right\} = 15 \text{ b. E.} : x \text{ l. E.}$$

und $x = \frac{6 \times 8 \times 15}{5 \times 6} = 24$ Thlr. wie oben.

1. Zusatz.

§. 367. Hieraus läßt sich nun wieder eine allgemeine Regel herleiten. Man setze die fragende Zahl ins 3te Glied, und zum Antecedenten des ersten Verhältnisses nehme man dasjenige Glied, welches mit der Fragezahl einerlei Namen hat. Im zweiten Verhältnisse fange man wieder mit demjenigen Gliede an, welches mit dem vorigen Consequenten einerlei Namen hat, und so fahre man bis zu Ende fort. Das Product aller Consequenten und der fragenden Zahl dividire man nun durch das Product aller Antecedenten; so giebt der Quotient das Verlangte. Dieses führt uns auf die in §. 339. bereits erwähnte Kettenrechnung (Regula multiplex), deren man sich bei der Reductionsrechnung besonders mit Vortheil bedienen kann, indem man die gegebenen Zwischenverhältnisse, wie bei der Ketten- oder Reesischen Regel, in 2 Reihen kettenweise so unter einander verbindet, daß die Fragezahl in die Reihe zur rechten, oben aber, in die Reihe zur linken diejenige Zahl gesetzt wird, welche mit der Fragezahl einerlei Namen hat, überhaupt, daß man allezeit mit demjenigen Namen anfängt, mit welchem man in der Reihe zur rechten aufgehört hat. Das übrige ist, wie vorhin. Es sei das vorige Beyspiel, so ist:

x Thlr.	15 b. E.
5 b. E. :	6 l. E.
6 l. E. :	8 Thlr.
30	: 720 und $x = \frac{720}{30} = 24$ Thlr.

Anmerkung.

Da diese Kettenregel keine großen Schwierigkeiten hat, so kann sie bei solchen zusammengesetzten Verhältnissen, wie bereits oben, ebenfalls mit Vortheil angewendet werden.

2. Zusatz.

§. 368. Manche Rechenmeister behandeln diese Kettenregel eigentlich nicht nach Proportionen, sondern nach dem

Reductionssatze. Aus §. 355. ist es aber deutlich, daß es auf eins heraus kommt, sobald man aus den Verhältnissen den Reductionssatz, oder, welches einerlei ist, die Gleichungen formirt. Z. B. Das in Frankreich eingeführte Gewicht, Gramme genannt, wiegt nach Laplace 18,82715 Grän des ehemaligen Pariser Marktgewichtes; 9216 Grän machen 1 Pariser Pfund, 1 Pariser Pfund beträgt 10188 holländische As, wovon 9716 ein Dresdner Pfund ausmachen. Wie viel beträgt nun ein solcher Gramme in Dresdner Pfundgewicht? Nach der Kettenrechnung ist der Aufsatz:

x dresdn. Pf.	1 Gramme
1 Gramme	18,82715 Grän
2308 ~~9216~~ Grän	1 Par. Pf.
1 Par. Pf.	~~10188~~ holl. As 2547
9716 holl. As	1 dresdn. Pf.

$$x = \frac{18,82715 \times 2547}{2308 \times 9716} = 0,002142118 \text{ dr. Pf.}$$

Beispiele zur Uebung.

I. Wie viel wiegt ein Dresdner Cubikfuß Regenwasser, da ein französischer Cubikfuß 70 französische Pfund wiegt, und 9716 holl. As 1 dresdn. Pfund, und 10188 holl. As ein französisches Handelspfund betragen?

x dresdner Pfund	1 dresdner Cubikfuß
1 „ Cubikfuß	1974294,778 frz. Cubiklin.
2985984 franz. Cubiklin.	1 par. Cubikfuß
1 par. Cubikfuß	70 franz. Pfund
1 franz. Pfund	10188 holländ. As
9716 holländ. As	1 dresdn. Pfund

$$x = \frac{1974294,778 \times 70 \times 10188}{2985984 \times 9716} = 48,5315 \text{ dresdn. Pf.}$$

II. Wie viel gewinnt ein Lieferant an 100 Scheffel Hafer, wenn er von 3 Metzen 5 Groschen nimmt?

x Thlr.	100 Scheffel
1 Scheffel	2 ~~16~~ Metzen
3 Metzen	5 Groschen
3 ~~24~~ Groschen	1 Thlr.

$$x = \frac{100 \times 2 \times 5}{3 \times 3} = 111\tfrac{1}{9} \text{ Thlr.} = 111 \text{ Thl. } 2 \text{ Gr. } 8 \text{ Pf.}$$

III. Wie

III. Wie viel betragen 50 Louisd'or an Zwanzigkreutzern, den Louisd'or zu 5 Thlr. 6 Groschen gerechnet?

x Kreutzer	~~50~~ 25 Louisd.
1 Louisd.	126 Groschen
8 ~~16~~ Groschen	1 Gulden
1 Gulden	3 Zwanzigkreutzer.

$$x = \frac{25 \times 126 \times 3}{8} = 1431\tfrac{1}{4} \text{ Zwanzigkreutzer.}$$

Tafel

der gemeinen Logarithmen von 1 bis 1000.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
0	inf. neg.	40	1,602060	80	1,903090	120	2,079181
1	0,000000	41	1,612783	81	1,908485	121	2,082785
2	0,301030	42	1,623249	82	1,913813	122	6359
3	0,477121	43	1,633468	83	1,919078	123	9905
4	0,602060	44	1,643452	84	1,924279	124	2,093421
5	0,698970	45	1,653212	85	1,929418	125	6910
6	0,778151	46	1,662757	86	1,934498	126	2,100370
7	0,845098	47	1,672097	87	1,939519	127	3803
8	0,903090	48	1,681241	88	1,944482	128	7210
9	0,954242	49	1,690196	89	1,949390	129	2,110589
10	1,000000	50	1,698970	90	1,954242	130	3943
11	1,041392	51	1,707570	91	1,959041	131	7271
12	1,079181	52	1,716003	92	1,963787	132	2,120573
13	1,113943	53	1,724275	93	1,968482	133	3851
14	1,146128	54	1,732393	94	1,973127	134	7104
15	1,176091	55	1,740362	95	1,977723	135	2,130333
16	1,204120	56	1,748188	96	1,982271	136	3538
17	1,230448	57	1,755874	97	1,986771	137	6720
18	1,255272	58	1,763428	98	1,991226	138	9879
19	1,278753	59	1,770852	99	1,995635	139	2,143014
20	1,301030	60	1,778151	100	2,000000	140	6128
21	1,322219	61	1,785329	101	4321	141	9219
22	1,342422	62	1,792391	102	8600	142	2,152288
23	1,361727	63	1,799340	103	2,012837	143	5336
24	1,380211	64	1,806180	104	7033	144	8362
25	1,397940	65	1,812913	105	2,021189	145	2,161368
26	1,414973	66	1,819543	106	5305	146	4352
27	1,431363	67	1,826074	107	9383	147	7317
28	1,447158	68	1,832508	108	2,033423	148	2,170261
29	1,462398	69	1,838849	109	7426	149	3186
30	1,477121	70	1,845098	110	2,041392	150	6091
31	1,491361	71	1,851258	111	5323	151	8976
32	1,505150	72	1,857332	112	9218	152	2,181843
33	1,518513	73	1,863322	113	2,053078	153	4691
34	1,531478	74	1,869231	114	6904	154	7520
35	1,544068	75	1,875061	115	2,060697	155	2,190331
36	1,556302	76	1,880813	116	4458	156	3124
37	1,568201	77	1,886490	117	8185	157	5899
38	1,579783	78	1,892094	118	2,071882	158	8657
39	1,591064	79	1,897627	119	5547	159	2,201397

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
160	2,204120	210	2,322219	260	2,414973	310	2,491361
161	6825	211	4282	261	6640	311	2760
162	9515	212	6335	262	8301	312	4154
163	2,212187	213	8379	263	9955	313	5544
164	4843	214	2,330413	264	2,421603	314	6929
165	7483	215	2438	265	3245	315	8310
166	2,220108	216	4453	266	4881	316	9687
167	2716	217	6459	267	6511	317	2,501059
168	5309	218	8456	268	8134	318	2427
169	7886	219	2,340444	269	9752	319	3790
170	2,230448	220	2422	270	2,431363	320	5150
171	2996	221	4392	271	2969	321	6505
172	5528	222	6353	272	4568	322	7855
173	8046	223	8304	273	6162	323	9202
174	2,240549	224	2,350248	274	7750	324	2,510545
175	3038	225	2182	275	9332	325	1883
176	5512	226	4108	276	2,440909	326	3217
177	7973	227	6025	277	2479	327	4547
178	2,250420	228	7934	278	4044	328	5873
179	2853	229	9835	279	5604	329	7195
180	5272	230	2,361727	280	7158	330	8513
181	7678	231	3612	281	8706	331	9828
182	2,260071	232	5488	282	2,450249	332	2,521138
183	2451	233	7355	283	1786	333	2444
184	4817	234	9215	284	3318	334	3746
185	7171	235	2,371067	285	4844	335	5044
186	9512	236	2912	286	6366	336	6339
187	2,271841	237	4748	287	7881	337	7629
188	4157	238	6577	288	9392	338	8916
189	6461	239	8397	289	2,460897	339	2,530199
190	8753	240	2,380211	290	2398	340	1478
191	2,281033	241	2017	291	3893	341	2754
192	3301	242	3815	292	5382	342	4026
193	5557	243	5606	293	6867	343	5294
194	7801	244	7389	294	8347	344	6558
195	2,290034	245	9166	295	9822	345	7819
196	2256	246	2,390935	296	2,471291	346	9076
197	4466	247	2697	297	2756	347	2,540329
198	6665	248	4451	298	4216	348	1579
199	8853	249	6199	299	5671	349	2825
200	2,301030	250	7940	300	7121	350	4068
201	3196	251	9673	301	8566	351	5307
202	5351	252	2,401400	302	2,480006	352	6542
203	7496	253	3120	303	1442	353	7774
204	9630	254	4833	304	2873	354	9003
205	2,311752	255	6540	305	4299	355	2,550228
206	3867	256	8240	306	5721	356	1450
207	5970	257	9933	307	7138	357	2668
208	8063	258	2,411619	308	8550	358	3883
209	2,320146	259	3299	309	9958	359	5094

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
360	2,556302	410	2,612783	460	2,662757	510	2,707570
361	7507	411	3841	461	3700	511	8420
362	8708	412	4897	462	4642	512	9270
363	9906	413	5950	463	5581	513	2,710117
364	2,561101	414	7000	464	6518	514	0963
365	2292	415	8048	465	7453	515	1807
366	3481	416	9093	466	8385	516	2649
367	4666	417	2,620136	467	9316	517	3490
368	5847	418	1176	468	2,670245	518	4329
369	7026	419	2214	469	1172	519	5167
370	8201	420	3249	470	2097	520	6003
371	9373	421	4282	471	3020	521	6837
372	2,570542	422	5312	472	3942	522	7670
373	1708	423	6340	473	4861	523	8501
374	2871	424	7365	474	5778	524	9331
375	4031	425	8388	475	6693	525	2,720159
376	5187	426	9409	476	7607	526	0985
377	6341	427	2,630427	477	8518	527	1810
378	7491	428	1443	478	9427	528	2633
379	8639	429	2457	479	2,680335	529	3455
380	9783	430	3468	480	1241	530	4275
381	2,580925	431	4477	481	2145	531	5094
382	2063	432	5483	482	3047	532	5911
383	3198	433	6487	483	3947	533	6727
384	4331	434	7489	484	4845	534	7541
385	5460	435	8489	485	5741	535	8353
386	6587	436	9486	486	6636	536	9164
387	7711	437	2,640481	487	7529	537	9974
388	8831	438	1474	488	8419	538	2,730782
389	9949	439	2464	489	9308	539	1588
390	2,591064	440	3452	490	2,690196	540	2393
391	2176	441	4438	491	1081	541	3197
392	3286	442	5422	492	1965	542	3999
393	4392	443	6403	493	2846	543	4799
394	5496	444	7383	494	3726	544	5598
395	6597	445	8360	495	4605	545	6396
396	7695	446	9334	496	5481	546	7192
397	8790	447	2,650307	497	6356	547	7987
398	9883	448	1278	498	7229	548	8780
399	2,600072	449	2246	499	8100	549	9572
400	2060	450	3212	500	8970	550	2,740362
401	3144	451	4176	501	9837	551	1151
402	4226	452	5138	502	2,700703	552	1939
403	5305	453	6098	503	1568	553	2725
404	6381	454	7055	504	2430	554	3509
405	7455	455	8011	505	3291	555	4293
406	8526	456	8964	506	4150	556	5074
407	9594	457	9916	507	5008	557	5855
408	2,610660	458	2,660865	508	5863	558	6634
409	1723	459	1812	509	6717	559	7411

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
560	2,748188	610	2,785329	660	2,819543	710	2,851258
561	8962	611	6041	661	2,820201	711	1869
562	9736	612	6751	662	0858	712	2480
563	2,750508	613	7460	663	1513	713	3089
564	1279	614	8168	664	2168	714	3698
565	2048	615	8875	665	2821	715	4306
566	2816	616	9580	666	3474	716	4913
567	3583	617	2,790285	667	4125	717	5519
568	4348	618	0988	668	4776	718	6124
569	5112	619	1690	669	5426	719	6728
570	5874	620	2391	670	6074	720	7332
571	6636	621	3091	671	6722	721	7935
572	7396	622	3790	672	7369	722	8537
573	8154	623	4488	673	8015	723	9138
574	8911	624	5184	674	8659	724	9738
575	9667	625	5880	675	9303	725	2,860338
576	2,760422	626	6574	676	9946	726	0936
577	1175	627	7267	677	2,830588	727	1534
578	1927	628	7959	678	1229	728	2131
579	2678	629	8650	679	1869	729	2727
580	3428	630	9340	680	2508	730	3322
581	4176	631	2,800029	681	3147	731	3917
582	4923	632	0717	682	3784	732	4511
583	5668	633	1403	683	4420	733	5104
584	6412	634	2089	684	5056	734	5696
585	7155	635	2773	685	5690	735	6287
586	7897	636	3457	686	6324	736	6877
587	8638	637	4139	687	6956	737	7467
588	9377	638	4820	688	7588	738	8056
589	2,770115	639	5500	689	8219	739	8644
590	0852	640	6180	690	8849	740	9231
591	1587	641	6858	691	9478	741	9818
592	2321	642	7535	692	2,840106	742	2,870403
593	3054	643	8211	693	0733	743	0988
594	3786	644	8885	694	1359	744	1572
595	4517	645	9559	695	1984	745	2156
596	5246	646	2,810232	696	2609	746	2738
597	5974	647	0904	697	3232	747	3320
598	6701	648	1575	698	3855	748	3901
599	7426	649	2244	699	4477	749	4481
600	8151	650	2913	700	5098	750	5061
601	8874	651	3581	701	5718	751	5639
602	9596	652	4247	702	6337	752	6217
603	2,780317	653	4913	703	6955	753	6795
604	1036	654	5577	704	7572	754	7371
605	1755	655	6241	705	8189	755	7947
606	2472	656	6903	706	8804	756	8521
607	3188	657	7565	707	9419	757	9095
608	3903	658	8225	708	2,850033	758	9669
609	4617	659	8885	709	0646	759	2,880241

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
760	2,880813	810	2,908485	860	2,934498	910	2,959041
761	1384	811	9020	861	5003	911	9518
762	1955	812	9556	862	5507	912	9994
763	2524	813	2,910090	863	6010	913	2,960470
764	3093	814	0624	864	6513	914	0946
765	3661	815	1157	865	7016	915	1421
766	4228	816	1690	866	7517	916	1895
767	4795	817	2222	867	8019	917	2369
768	5361	818	2753	868	8519	918	2842
769	5926	819	3283	869	9019	919	3315
770	6490	820	3813	870	9519	920	3787
771	7054	821	4343	871	2,940018	921	4259
772	7617	822	4871	872	0516	922	4730
773	8179	823	5399	873	1014	923	5201
774	8741	824	5927	874	1511	924	5672
775	9301	825	6453	875	2008	925	6141
776	9861	826	6980	876	2504	926	6611
777	2,890421	827	7505	877	2999	927	7079
778	0979	828	8030	878	3494	928	7548
779	1537	829	8554	879	3988	929	8015
780	2094	830	9078	880	4482	930	8482
781	2651	831	9601	881	4975	931	8949
782	3206	832	2,920123	882	5468	932	9415
783	3761	833	0645	883	5960	933	9881
784	4316	834	1166	884	6452	934	2,970346
785	4869	835	1686	885	6943	935	0811
786	5422	836	2206	886	7433	936	1275
787	5974	837	2725	887	7923	937	1739
788	6526	838	3244	888	8413	938	2202
789	7077	839	3762	889	8901	939	2665
790	7627	840	4279	890	9390	940	3127
791	8176	841	4796	891	9877	941	3589
792	8725	842	5312	892	2,950364	942	4050
793	9273	843	5827	893	0851	943	4511
794	9820	844	6342	894	1337	944	4972
795	2,900367	845	6856	895	1823	945	5431
796	0913	846	7370	896	2308	946	5891
797	1458	847	7883	897	2792	947	6350
798	2002	848	8395	898	3276	948	6808
799	2546	849	8907	899	3759	949	7266
800	3090	850	9418	900	4242	950	7723
801	3632	851	9929	901	4724	951	8180
802	4174	852	2,930439	902	5206	952	8636
803	4715	853	0949	903	5687	953	9092
804	5256	854	1457	904	6168	954	9548
805	5795	855	1966	905	6648	955	2,980003
806	6335	856	2473	906	7128	956	0457
807	6873	857	2980	907	7607	957	0911
808	7411	858	3487	908	8085	958	1365
809	7948	859	3993	909	8563	959	1818

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
960	2,982271	970	2,986771	980	2,991226	990	2,995635
961	2723	971	7219	981	1669	991	6073
962	3175	972	7666	982	2111	992	6511
963	3626	973	8112	983	2553	993	6949
964	4077	974	8559	984	2995	994	7386
965	4527	975	9004	985	3436	995	7823
966	4977	976	9449	986	3876	996	8259
967	5426	977	9894	987	4317	997	8695
968	5875	978	2,990338	988	4756	998	9130
969	6323	979	0782	989	5196	999	9565

1. Kurze

I.

Kurze Geschichte der in der ersten Abtheilung vorkommenden Wissenschaften.

Geschichte der Mathematik im Allgemeinen.

Da die eigentlichen Kriegswissenschaften von den mathematischen Wissenschaften abhängen; so wird es nicht zweckwidrig sein, eine kurze Uebersicht des Ursprunges und Fortganges der Mathematik zu geben.

Erste Periode.

Vom Ursprunge der mathematischen Kenntnisse bis auf das erste System der Geometrie, ohngefähr 300 Jahr vor Christi Geburt.

Natur und Zufall haben wohl den Ursprung mathematischer Kenntnisse bewirkt.

Man sagt, daß bei den Chaldäern, Bewohnern um Babylon, die ersten mathematischen, besonders aber die ersten astronomischen und astrologischen Kenntnisse zu finden gewesen wären, in Aegypten practisch-geometrische, unter Sesostris, und einige astronomische und physikalische bei den Priestern, welche sie aber geheim hielten.

Das Sonnenjahr der Aegyptier hatte 360 Tage, bald hernach aber wurde es auf 365 Tage gesetzt. Das Mechanische der Schiffsbau- und Steuermannskunst kommt von den Phöniziern her. Thales und Pythagoras, aus Grie-

chenland, legten den Grund zu ihren mathematischen Kenntnissen in Aegypten und Babylon, übertrafen aber gar bald ihre Lehrer. Ersterer legte den Grund zur wahren Geometrie in Griechenland, und sein Schüler, Anaximander, erfand die Landcharten, und lehrte zuerst die Geometrie öffentlich. Pythagoras zeichnete sich vorzüglich aus und machte wichtige Entdeckungen.

Außer diesen Männern machten sich in Griechenland noch Anaxagoras, Plato, Apollonius, Aristoteles rc. berühmt. Aeneas bearbeitete die Taktik. Die mathematischen Kenntnisse der Indianer und Sinesen in diesem Zeitraume sind nicht bewiesen.

Zweite Periode.

Bis auf Christi Geburt.

In diesem Zeitraume wurden die mathematischen Kenntnisse bei den Griechen allgemeiner, und in der Schule von Alexandrien bildeten sich die wichtigsten Mathematiker.

Euklides schrieb hier das erste System der Geometrie, und bearbeitete die Optik und Musik. Heron war ein berühmter Mechaniker.

Archimedes von Syrakus bearbeitete mehrere Zweige der niedern und höhern Geometrie, und legte den Grund zur Mechanik, Statik und Hydrostatik.

Der Geist, mit welchem er in die mathematischen Kenntnisse eindrang, und seine sinnreichen Erfindungen, sind das erste Muster der Mathematiker. Er vertheidigte seine Vaterstadt Syrakus gegen den Römer Marcellus, und wurde, mitten in seinen mathematischen Betrachtungen, von römischen Soldaten getödtet.

Athenäus, und später, Philo, schrieben von den Kriegsmaschinen. Noch mehrere Männer, unter andern Eratosthenes, Apollonius, Kanon rc. bearbeiteten mehrere Theile der Mathematik, und Polybius schrieb seine Kriegsgeschichte.

Die Römer bildeten sich nach diesen Männern und bearbeiteten Mechanik, bürgerliche und Kriegsbaukunst.

Julius Cäsar, Vitruv, Dionysins und Strabo sind die merkwürdigsten.

Dritte

Dritte Periode.

Bis auf den Untergang der Schule zu Alexandrien, im Jahre 641 nach Christi Geburt.

Unter der Menge von Commentatoren gab es in dieser Periode wenig originelle Mathematiker. Befehle der Kaiser und die Einfälle der Barbaren hinderten alle Fortschritte.

Onosander schrieb eine Anleitung zur Taktik; Ptolomäus legte in seiner Geometrie den geometrischen Grund zur Verfertigung der Landkarten, und

Diapsantes trug zuerst die Grundsätze der Algebra vor.

Josephus aus Jerusalem schrieb vom jüdischen Kriege, Julius Frontinus von den Kriegslisten, Flavius Arrianus von Schlachtordnungen, und Seneca von Kometen.

Vierte Periode.

Bis auf den Untergang des griechischen Kaiserthums, im Jahr 1453 nach Christi Geburt.

Alexandrien wurde 641 von den Arabern erobert, und dadurch der griechischen Gelehrsamkeit ein Ende gemacht.

Der Kalife Omar ließ die dortige unschätzbare Bibliothek verbrennen. Dies war das Ende der alexandrinischen Schule, die sich fast Jahrtausende um die Wissenschaften verdient gemacht hatte, und mit ihr war auch die Mathematik bei den Griechen unwiederbringlich verloren; sie fand aber bei den Arabern und Persern Aufnahme.

Die erstern wurden nun die Lehrer Europens in der Mathematik. Kaiser Leo IV. errichtete eine mathematische Schule in Constantinopel und schrieb selbst ein taktisches Werk.

Heron der jüngere schrieb eine Geodäsie und eine Vertheidigung der Festungen.

Als die Araber in Ruhe kamen, so beförderten einige ihrer Fürsten die mathematischen Wissenschaften und errichteten zu Bagdad eine astronomische Schule, und diese Nation erwarb sich nun entschiedene Verdienste in der Geometrie, Astronomie und Algebra.

Im 13. Jahrhunderte vermehrten sich, unter den Deutschen, Britten und Spaniern, die mathematischen Kenntnisse durch den Einfluß der Araber. Unter ihnen wirkten einige Gelehrte im Stillen. Gerbert, Campanus und Gioia, Groot, Roger Bakon, zeichnen sich vorzüglich aus.

Fünfte Periode.

Bis auf den Freiherrn von Wolf, oder bis um die Hälfte des 18. Jahrhunderts.

Die aus Griechenland nach Italien und in die übrigen Länder Europens verpflanzten humanistischen Kenntnisse, die verbesserten und neu errichteten Schulen und Universitäten, die Erfindung der Buchdruckerkunst und Unterstützung großer Herren, waren die Ursachen der großen Fortschritte der Mathematik, besonders der angewandten, in diesem Zeitraume. Verschiedene, bisher noch nicht systematisch bearbeitete, Theile der letztern wurden in ein System gebracht und mit vielen Erfindungen bereichert, auch die Algebra auf die Geometrie angewandt.

Byrgius, Ludolph von Cölln, Vieta, Metius, Copernicus, Reinhold &c. erscheinen als vorzügliche Männer; Marchi, Tartaglia, Speckle, Freitag, Pagan, Rimpler, Schildknecht, Vauban &c. erfanden und verbesserten Befestigungssysteme.

Die Arithmetik, Geometrie und Analysis bearbeiteten Stiefel, Neper, Brigg, Vlacq, Keppler, Kavaleri, Galiläi, Wallis, die Bernoullis, Witt, Newton, Leibnitz &c. Die optischen Wissenschaften verbesserten: Keppler, Newton, Tschirnhausen, Huygens &c. Die mechanischen Wissenschaften: Stevin, Huygens, Wren, die Bernoullis, Newton &c. Die astronomischen Wissenschaften bearbeiteten: Keppler, Huygens, Cassini, Haller &c. Die Baukunst aber: Palladio, die Albertis, Goldmann, Sturm &c.

Der Gebrauch des Schießpulvers schuf die Artillerie. Dülacq, Robins, Belidor und Blondel erwarben sich um dieselbe große Verdienste.

Sechste Periode.

Bis auf unsere Zeiten.

Der Freiherr von Wolf erregte durch seine Schriften, in welchen Ordnung und Deutlichkeit herrscht, und worin er alle Theile der Mathematik bearbeitete, auch selbst durch seinen mündlichen Vortrag, allgemeine Achtung für das mathematische Studium, und Kästner erwarb sich das Prädicat des allgemeinen Lehrers der Mathematik.

Euler, Messier, Tobias Mayer, Hell, de la Lande, Caille, Boskowich, Bode rc. bereicherten die Astronomie mit neuen Entdeckungen. Herschel entdeckte im vorletzten Jahrzehnde des vorigen Jahrhunderts, den Uranus, und nahm Verbesserungen mit den Fernröhren vor.

Leonhard Euler faßte alles menschliche Wissen in der Mathematik zusammen und bearbeitete beinahe alle mathematische Wissenschaften. Segner, Karsten, la Grange, Mönnich, Scheibel, Langsdorf, Klügel, Vega, Abel Burja und mehrere andere haben durch ihre Schriften und mündliche Unterweisung viel geleistet.

Die besondern Theile der Kriegskunst haben sich in den letztern Jahrzehnden des vorigen Jahrhunderts durch die Bemühungen mehrerer verdienstvoller Männer, z. B. Tempelhofs, Röschens, Millers, Hahns, Scharnhorsts, Hoyers rc. zu Wissenschaften erhoben.

In der Festungsbaukunst haben sich Glaser, Aster, Struensee, Montalembert, Vergin, Böhm rc. durch richtige Grundsätze und Verbesserungen, so wie in der Feldbefestigungskunst, Clairac, Tilke, Scharnhorst, Müller, Zach rc. ausgezeichnet.

2.

Geschichte der Arithmetik insbesondere.

Nach allen Nachrichten sind die Phönicier die Erfinder der Arithmetik, deren ausgebreiteter Handel dazu Gelegenheit gegeben haben mag.

Das Zählen bis auf Zehn, oder nach der Dekadik, ist wohl die älteste Art zu rechnen, weil man wahrscheinlich zuerst an den Fingern zählte.

Die Phönicier bedienten sich zuerst der Buchstaben ihres Alphabetes, als kurzer Zeichen der Zahlen. Die ersten zehn zeigten die Einer an, die übrigen aber die höhern Ordnungen.

Die Griechen und Hebräer bedienten sich ebenfalls der Buchstaben ihres Alphabetes.

Die Lateiner bezeichneten ihre Zahlen nur mit 5 Buchstaben: I. V. X. L. C. Im Vitruv findet man jedoch auch nach unserer Art gezählt. Pythagoras, geb. 590 vor Christi Geburt, und seine Nachfolger, haben unstreitig der Arithmetik die erste wissenschaftliche Form gegeben. Ihre Hauptbeschäftigung betraf indessen besonders die Eigenschaften und Verhältnisse der Zahlen, welche, durch ihre Stellung, eine gewisse geometrische Figur gaben.

Euklides, der ohngefähr 272 Jahr vor Christi Geburt zu Alexandrien lebte, schrieb über die geraden, ungeraden, Prim- und Proportionalzahlen. Dieses Buch ist ein Meisterstück tief durchdachter Schlüsse.

Ptolomäus führte, zum Behuf der Astronomie, die Sexagesimalrechnung ein. Die Sexagesimalbrüche sind von den übrigen Brüchen dadurch unterschieden, daß sie keine andern Nenner als 60, oder ein Product von 60 mit sich selbst haben.

Die Erfindung unserer Zahlzeichen wird insgemein den Indianern zugeschrieben.

Die Saracenen brachten sie nach Spanien, und der Papst

Papst Sylvester II., sonst Gerbert genannt, von da nach Frankreich, von wo sie allgemeiner wurden.

Ihre erste Form ist vermuthlich um vieles verändert, das Hauptgesetz aber beibehalten worden.

Bis gegen das 17te Jahrhundert findet man nur sehr wenig Schriften über die Arithmetik, unter andern Adam Riesens Rechnung ꝛc. 1550.

Von der Fingerrechenkunst oder Daktylonomie findet man Nachricht in Leupolds Theatrum Arithmetico-Geometricum, 1727.

Noch sind die Methoden, mechanisch oder durch Hülfe vortheilhaft eingerichteter Instrumente oder Maschinen zu rechnen, zu erwähnen.

Hieher gehören die bereits erwähnten Nepperschen Stäbchen, das chinesische Recheninstrument und die römische Rechentafel, welche beide aus Tafeln, mit Drathsaite bespannt, bestehen, worauf Rechnungen, durch Hülfe beweglicher Kügelchen, geführet werden können. Die Rechenscheibe, Schotts Rechenkästchen, die Leupoldische und Leibnitzische Rechenmaschine ꝛc., welche man meistentheils in Leupolds Theatrum etc. abgebildet und beschrieben findet.

In den neuern Zeiten hat der hessische Ingenier-Hauptmann Müller eine Rechenmaschine erfunden.

Das dekadische System, oder die Dekadik, ist aber keinesweges das einzige; schon Aristoteles führt die thracische Nation an, die nur bis 4 zählte. Auf Veranlassung eines chinesischen Buches entwarf Leibnitz seine Diadik, wo er sich nur der Zahlzeichen 1 und 0 bedienet und unsere Zahlen folgendergestalt ausdrückt.

1 = 1
10 = 2
11 = 3
100 = 4
101 = 5
110 = 6
111 = 7
1000 = 8 ꝛc.

Als

Als Hülfsmittel zum Studium der Geschichte der Mathematik überhaupt ist des Montucla Werk, welches in Paris 1758 herausgekommen, vorzüglich zu empfehlen.

Einen kurzen, aber brauchbaren Abriß der Geschichte der Mathematik findet man in Walds Versuch einer Einleitung in die Geschichte der Kenntnisse, Wissenschaften ꝛc.

3.

Geschichte der Algebra insbesondere.

Aus dem Alterthume ist uns, außer dem Werke des Diophantus, keins bekannt, in welchem allgemeine Rechenkunst, oder nur eine Spur davon vorkäme.

Im 9ten Jahrhunderte traten die Araber, unter dem Kalifen Al Mamun, mit dieser Wissenschaft auf, und gaben ihr den Namen Algebra. Muhammed Ben Moussa soll die quadratischen Gleichungen gefunden, und Thabet schon Anwendungen auf die Geometrie gemacht haben.

Im Occident wurde diese Wissenschaft im 15ten Jahrhunderte bekannt.

Leonardus von Pisa soll sie 1450 aus dem Oriente mitgebracht haben.

Das erste gedruckte algebraische Werk ist das des Lukas de Burgo.

Die erste deutsche Algebra schrieb Christoph Rudolph 1524 in Wien. Durch Franz Vieta von Fontenai bekam die Algebra eine neue Gestalt, indem er sich zur Bezeichnung der bekannten Größen der größern Buchstaben bediente, und lehrte, wie man einer Gleichung die bequemste Gestalt geben könnte.

Der

Der Engländer Harriot bediente sich zuerst der kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabetes. Cartesius verbesserte und bereicherte diese Wissenschaft mit mehreren neuen Ideen.

Die wichtigsten Wahrheiten der gemeinen Analysis sind im 17ten Jahrhunderte erfunden worden.

In Wolfs Elementen findet man das bis zu seiner Zeit Erfundene und Zerstreute von der Analysis endlicher Größen gesammelt und in eine wissenschaftliche Form gebracht.

Hausen, Euler, Kästner, Segner, Karsten, Klügel, Tempelhof, Langsdorf, Abel Bürja, Hindenburg und Fischer, welche letztere beide sich besonders um die combinatorische Analytik verdient gemacht, haben sich in den neuern Zeiten, indem sie diese Wissenschaft auf eine deutliche und vollständige Art in ihren Lehrbüchern vorgetragen, unbezweifelte Verdienste um selbige erworben.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Otto Gilch
derei - Prägerei
nchen 8
2 - Tel. 442052

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Backenberg, Franz Heinrich,

Lehrbuch der Kriegswissenschaften für die Königl. Sächsische Ritterakademie bestimmt

Bd.: T. 1. Abt. 1.

Leipzig 1812

Sc.mil. 220-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10784981-2